

CWI Syllabi

Managing Editors

A.M.H. Gerards (CWI, Amsterdam)

J.W. Klop (CWI, Amsterdam)

N.M. Temme (CWI, Amsterdam)

Executive Editor

M. Bakker (CWI Amsterdam, e-mail: Miente.Bakker@cwi.nl)

Editorial Board

W. Albers (Enschede)

K.R. Apt (Amsterdam)

M. Hazewinkel (Amsterdam)

P.W.H. Lemmens (Utrecht)

J.K. Lenstra (Amsterdam)

M. van der Put (Groningen)

A.J. van der Schaft (Enschede)

J.M. Schumacher (Tilburg)

H.J. Sips (Delft, Amsterdam)

M.N. Spijker (Leiden)

H.C. Tijms (Amsterdam)

CWI

P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands

Telephone + 31 - 20 592 9333

Telefax + 31 - 20 592 4199

Website <http://www.cwi.nl/publications/>

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.



Vakantiecursus 2004

Structuur in schoonheid

Centrum voor Wiskunde en Informatica
CWI SYLLABUS 53



De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum voor Wiskunde en Informatica en aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Deze cursus is mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek.

ISBN 90 6196 524 1

NUGI-code: 811

Copyright ©2004, Stichting Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam
Printed in the Netherlands

Inhoud

Docenten	vi
Ten geleide J. VAN DE CRAATS	1
Verbeelding van het projectieve vlak J.M. AARTS	3
Symmetrie in islamitische ornamentale kunst J. VAN DE CRAATS	23
Kubische gipsmodellen J. TOP	37
Kleurenbijlage	59
De parels van Indra F. BEUKERS	81
Dimensie 5 in zicht H. FINKELNBERG	103
Structuur en schoonheid in de <i>Sleutel tot de Rekenkunde</i> van al-Kāshī J.P. HOGENDIJK	111
Het invullen van Eschers Prentententoonstelling B.J.H. JANSEN	125

Docenten

Prof.dr. J.M. Aarts

Van Kinschotstraat 13, 2614 XJ Delft, tel. 015 – 2126448

J.M.Aarts@ewi.tudelft.nl

Prof.dr. F. Beukers

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht,

tel. 030 – 2531419

beukers@math.uu.nl

Prof.dr. J. van de Craats

Koninklijke Militaire Academie, Postbus 90002, 4800 PA Breda,

tel. 076 – 5273816

J.vd.Craats@mindef.nl

Dr. H. Finkelnberg

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden,

tel. 071 – 5277106

hfinkeln@math.leidenuniv.nl

Dr. J.P. Hogendijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht,

tel. 030 – 2533697

hogend@math.uu.nl

Prof.dr. H.W. Lenstra

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden,

tel. 071 – 5277127

hwl@math.leidenuniv.nl

Dr. J. Top

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen,

Postbus 800, 9700 AV Groningen, tel. 050 – 3633986

top@math.rug.nl

Ten geleide

J. van de Craats
Koninklijke Militaire Academie
e-mail: J.vd.Craats@mindef.nl

Structuur in schoonheid, het thema van de CWI-Vakantiecursus 2004, plaatst het esthetische element in de wiskunde op de voorgrond. Want hoe belangrijk toepassingen van de wiskunde ook zijn, voor wiskundigen zelf zou het vak zonder de schoonheid ervan toch veel van zijn glans verliezen. Sommige wiskundigen zien zelfs schoonheid in abstracte, wiskundige structuren, en zij zouden de titel dus liever omkeren, maar in deze Vakantiecursus zijn de sprekers uitgegaan van het visuele en het tastbare. Allemaal hebben zij zich ten doel gesteld om ook niet-specialisten de schoonheid van hun vakgebied te laten beleven.

De onderwerpen variëren van halfregelmatige veelvlakken tot lijnen in de projectieve ruimte, van wiskundige gipsmodellen tot complexe cirkelconfiguraties, van islamitische kunst en architectuur tot de paradoxale fantasiewereld van M.C. Escher.

Gaarne wil ik hier allen bedanken die in 2004 opnieuw een Vakantiecursus mogelijk hebben gemaakt. In de eerste plaats natuurlijk de sprekers, die naast hun lezing ook een tekst voor deze Syllabus hebben geleverd. Daarmee wordt opnieuw een aantrekkelijk deel toegevoegd aan een serie met voor leraren en andere belangstellenden waardevol materiaal. Het Centrum voor Wiskunde en Informatica te Amsterdam en de Technische Universiteit Eindhoven stelden zaalruimte beschikbaar, de administratieve en praktische organisatie van de cursus was in handen van mevrouw Wilmy van Ojik en dr. Miente Bakker, die ook samen met Chester Thomson de inhoudelijke coördinatie van deze Syllabus verzorgde. Hulde ook aan Tobias Baanders voor de prachtige tekeningen in de bijdrage van Jan Aarts.

Allen hartelijk dank!

Verbeelding van het projectieve vlak

J.M. Aarts

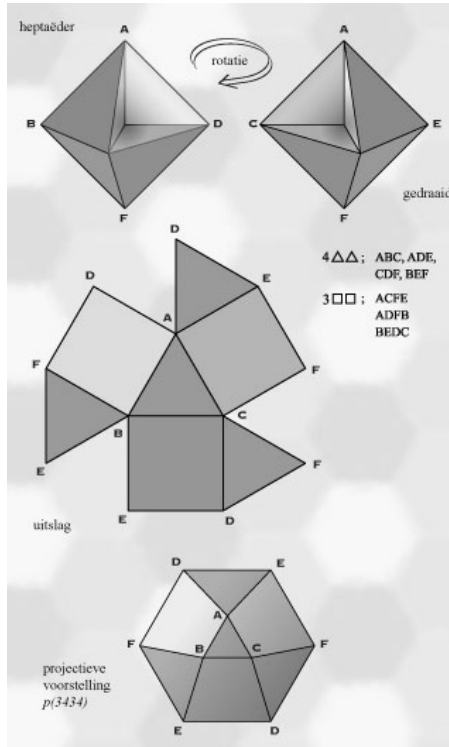
Faculteit EWI, Afdeling Mediamatica, Technische Universiteit Delft
e-mail: J.M.Aarts@ewi.tudelft.nl

Er worden verschillende voorstellingen van het projectieve vlak besproken. In samenhang hiermee wordt er ook aandacht besteed aan de regelmatige en half-regelmatige overdekkingen van het projectieve vlak (van de eerste en tweede soort).

Ik ben Tobias Baanders van het CWI bijzonder dankbaar voor de prachtige tekeningen die hij voor mijn bijdrage heeft gemaakt.

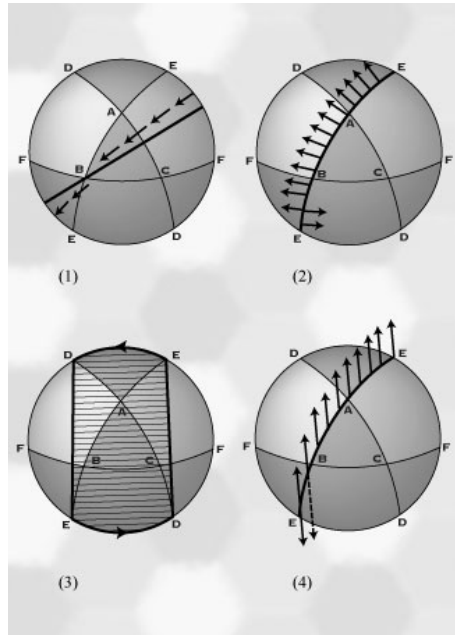
1. INLEIDING

De *heptaëder*, het halfregelmatige zevenvlak, is een oppervlak dat is opgebouwd uit 4 driehoeken en 3 vierkanten. Al zijn ribben zijn even lang en in ieder hoekpunt komen om en om 2 vierkanten en 2 driehoeken samen. De heptaëder ontstaat uit de oktaëder, het regelmatige achthoekvlak, door weglating om en om van 4 driehoeken en inhangen van 3 vierkanten. Zie Figuur 1 op pagina 4 of 59 (kleur). Deze vierkanten zijn de middenvlakken van de oktaëder, die door vier van zijn hoekpunten gaan. In deze voorstelling van de heptaëder treedt zelfdoorsnijding op: de vierkanten doorsnijden elkaar twee aan twee in drie onderling loodrechte lijnen (die door één punt gaan). Die doorsnijding hangt samen met deze speciale wijze van voorstelling van de heptaëder. In werkelijkheid ('in het echt') heeft elk tweetal van de drie vierkanten slechts twee overlappende hoekpunten gemeenschappelijk. Maar omdat we de heptaëder als figuur in de driedimensionale ruimte willen zien, is zelfdoorsnijding onvermijdelijk. In het fraaie knutselboek [5] heet de heptaëder een tetrahemi-hexahedron; 'tetra' verwijst naar de vier driehoeken van de tetraëder, 'hemi' naar de aanwezigheid van vlakken door het middelpunt, die dezelfde vorm hebben als de middenvlakken van het 'hexahedron' (= regelmatig zesvlak of kubus), waarvan de middenvlakken vierkanten zijn. Dat wat betreft de nomenclatuur. In zekere zin is de heptaëder een uniform of Archimedisches veelvlak. Immers, het is opgebouwd uit regelmatige veelhoeken en in ieder hoekpunt zien we dezelfde configuratie: om en om 2 driehoeken en 2 vierkanten. In de gebruikelijke notatie van de uniforme veelvlakken zou het zevenvlak moeten worden aangeduid met (3434), vergelijk Van der Vegt [4, p. 30]. Toch heeft Van der Vegt het heptaëder terecht niet opgenomen bij de opsomming van de Archimedische veelvlakken. Wat is hier aan de hand?



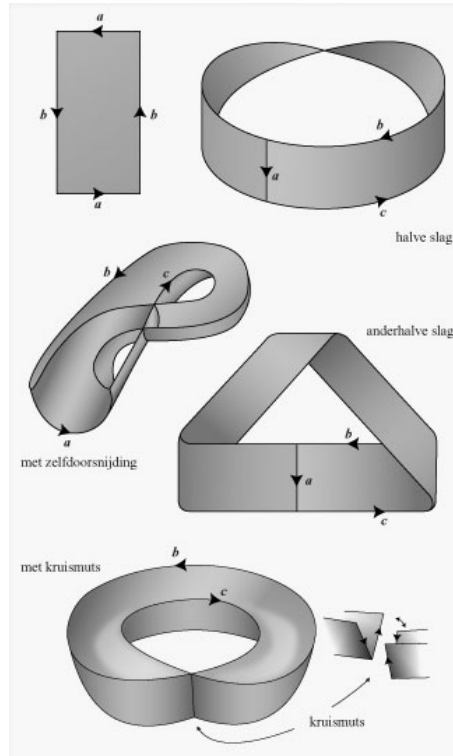
Figuur 1. De heptaëder (3434), ook wel tetrahemihexahedron genaamd

Om een beter inzicht in de heptaëder te krijgen maken we een uitslag ervan. Na topologische vervorming ontstaat er een zeshoek waarvan het binnengebied verdeeld is in vier (topologische) driehoeken en drie (topologische) vierkanten. De plaatsing van de labels bij de hoekpunten geeft aan dat we op de rand nog diametrale punten twee aan twee met elkaar moeten identificeren (op elkaar moeten plakken). Om redenen die later duidelijk zullen worden, noemen we de zo verkregen figuur, inclusief plakschema, de *projectieve voorstelling* $p(3434)$ van de heptaëder. In de driedimensionale ruimte is de identificatie van de diametrale punten alleen mogelijk als we zelfdoorsnijding van de figuur toestaan; het resultaat is dan de heptaëder zoals boven beschreven. Terloops merken we nog op dat het wèl mogelijk is om in de vierdimensionale ruimte een voorstelling zonder zelfdoorsnijding te maken. Laten we eens kijken welke merkwaardige eigenschappen we uit de projectieve voorstelling kunnen aflezen. Zie Figuur 2 op pagina 5 of 60 (kleur).



Figuur 2. Merkwaardige eigenschappen van de heptaëder (in projectieve voorstelling)

1. Door twee diametrale punten met een rechte lijn te verbinden krijgen we een topologische cirkel (de diametrale punten worden immers op elkaar geplakt). Zo'n cirkel brengt geen verdeling van de heptaëder teweeg.
2. De heptaëder is niet oriënteerbaar. Bekijken we bijvoorbeeld de topologische cirkel $EBAE$ en zetten we, gaande in de richting van E naar B , pijltjes uit naar links, dan blijkt na een volledige rondgang dat de pijltjes naar rechts staan.
3. Van de 'rechthoek' $DEDE$ moeten, in verband met het identificatie voorschrift, twee overstaande zijden, beide met label DE aan elkaar geplakt worden. Bij dat plakken wordt de rechthoek een halve slag gedraaid. Zo zien we dat er een Möbius-band in de heptaëder zit. Voor een impressie van de Möbius-band zie Figuur 3 op pagina 6 of 61 (kleur).



Figuur 3. Vijfmaal de Möbius-band

4. De volgende eigenschap is nauw verwant met de eigenschap 2. De heptaëder is een éézijdig oppervlak. Bepalen we een normaal met behulp van een rechtsdraaiende driepoot dan blijkt na rondgang langs een niet-scheidende cirkel dat de normaal de andere kant op wijst. We kunnen dus geen binnen- en buitenkant onderscheiden.
5. Uit de vorige eigenschap zien we meteen dat de heptaëder geen scheiding in de ruimte aanbrengt. Zijn er twee willekeurige punten in de ruimte gegeven die niet op de heptaëder liggen, dan kun je die punten altijd met een kromme verbinden. Je kan immers vanuit beide punten eerst richting oppervlak gaan tot je er heel dicht bij bent. Gelet op het gestelde in 4 kan je daarna de twee dicht bij de heptaëder gelegen punten met een kromme verbinden.
6. Zoals gebruikelijk geven we met Z , R , H opeenvolgend aan de aantallen zijvlakken, ribben, hoekpunten van een veelvlak. Voor de heptaëder vinden we $Z - R + H = 7 - 12 + 6 = 1$.

Zoals gezegd, wordt de heptaëder niet vermeld bij Van der Vegt [4]. Dat komt omdat Van der Vegt zich alleen bezighoudt met oriënteerbare oppervlakken (namelijk, afgesloten delen van de ruimte die begrensd worden door vlakke

veelhoeken; [4], p. 10) en eigenlijk alleen met sferische veelvlakken, dat zijn veelvlakken met de topologische vorm van een sfeer; dat zie je aan het feit dat voor de sferische veelvlakken de volgende Formule van Euler geldt:

$$Z - R + H = 2.$$

Samenvattend: *de heptaëder is noch oriënteerbaar, noch sferisch. Topologisch bezien is de heptaëder het projectieve vlak.*

Dit artikel is ontstaan naar aanleiding van vragen van Vera Wagenaar. Na studie van veelvlakken in [4] kwam zij met vragen over de heptaëder en de treiskaidekaëder (dertien-vlak), die ontstaat door afknotting van de heptaëder.

2. HET PROJECTIEVE VLAK

In de gewone vlakke meetkunde hebben twee verschillende evenwijdige lijnen per definitie geen snijpunt. Voor sommige doeleinden is het nuttig om elk tweetal verschillende evenwijdige lijnen wel een snijpunt te geven (en ook niet meer dan één). Zo'n snijpunt kun je je voorstellen als een *richting* of als een *oneindig ver punt*. Het *projectieve vlak* \mathbb{P}^2 bestaat uit het *gewone platte vlak* tezamen met *de oneindig verre punten*. Om dit beter te kunnen beschrijven, werken we met homogene coördinaten. Een punt \mathbf{x} uit het vlak met gewone coördinaten (x_1, x_2) krijgt de homogene coördinaten (ξ_0, ξ_1, ξ_2) waarbij de ξ_n 's reële getallen zijn, $\xi_0 \neq 0$, $x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}$ en $x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$. Bij een punt \mathbf{x} horen meerdere drietallen van homogene coördinaten. De drietallen (ξ_0, ξ_1, ξ_2) en (η_0, η_1, η_2) zijn de homogene coördinaten van eenzelfde punt uit het vlak dan en alleen dan als er een getal $\lambda \neq 0$ bestaat zó dat $\xi_n = \lambda \eta_n$ voor $n = 1, 2, 3$. Aan een (richtings)vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ in het vlak – een oneindig ver punt dus – voegen we de homogene coördinaten $(0, a_1, a_2)$ toe. De drietallen $(0, a_1, a_2)$ en $(0, b_1, b_2)$ zijn de homogene coördinaten van eenzelfde oneindig verre punt dan en slechts dan als er een getal $\lambda \neq 0$ bestaat zó dat $a_1 = \lambda b_1$ en $a_2 = \lambda b_2$; de vectoren (a_1, a_2) en (b_1, b_2) bepalen dan dezelfde richting.

Merk op dat bij alle drietallen van homogene coördinaten ten minste één van die getallen ongelijk aan nul is. Immers bij de punten uit het gewone vlak horen drietallen waarvan het eerste getal ongelijk 0 is en bij de oneindig verre punten horen drietallen waarvan weliswaar het eerste getal gelijk 0 is, maar de andere twee niet beide 0 kunnen zijn, omdat ze bij een richtingsvector horen (die altijd ongelijk aan de nulvector is). Verder is het duidelijk dat elk drietal van reële getallen die niet alle drie nul zijn ook optreedt als drietal van homogene coördinaten van een punt uit \mathbb{P}^2 . Nu zijn we gewend om bij een drietal reële getallen (x_0, x_1, x_2) te denken aan (de gewone coördinaten van) een punt in de ruimte \mathbb{R}^3 . De relatie tussen homogene coördinaten van een punt in het projectieve vlak \mathbb{P}^2 en punten in de ruimte \mathbb{R}^3 is als volgt. Alle homogene coördinaten van *een punt uit het projectieve vlak* zijn de punten van *eenzelfde lijn in de ruimte door de oorsprong O , met uitzondering van O* . De lijnen door O gelegen in het vlak $x_0 = 0$ corresponderen met de oneindig verre punten, de andere lijnen door O corresponderen met de punten uit het (gewone) vlak. Dit volgt uit de boven gemaakte opmerkingen over de vraag

wanneer twee drietallen de homogene coördinaten van eenzelfde punt zijn. Zo komen we tot een meer formele definitie van het projectieve vlak.

Definitie. De punten van het *projectieve vlak* \mathbb{P}^2 zijn de lijnen door de oorsprong in \mathbb{R}^3 .

Een punt \mathbf{x} in \mathbb{P}^2 is geheel bepaald door een vector langs de lijn in \mathbb{R}^3 , met andere woorden door zijn homogene coördinaten, $\mathbf{x} = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$. Een *lijn in* \mathbb{P}^2 is gegeven door een homogene lineaire vergelijking in de homogene coördinaten:

$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0.$$

De getallen (a_0, a_1, a_2) heten de coördinaten van de lijn. De lijn $\xi_0 = 0$ is de verzameling van alle oneindig verre punten.

Twee verschillende lijnen in het projectieve vlak hebben precies één snijpunt. Dat kan men op de volgende wijze berekenen. Gegeven zijn de homogene vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 &= 0 \\ b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

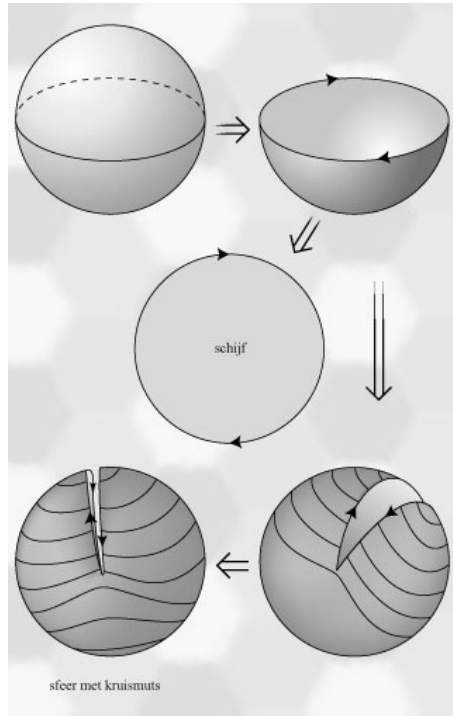
waarbij (a_0, a_1, a_2) en (b_0, b_1, b_2) verschillende vectoren in \mathbb{R}^3 zijn, beide ongelijk aan de nulvector. We onderscheiden twee gevallen.

1. $a_1b_2 \neq a_2b_1$. In het gewone vlak hebben we te maken met twee niet-evenwijdige lijnen. Stellen we $\xi_0 = 1$, dan vinden we als oplossing de homogene coördinaten $(1, \cdot, \cdot)$ van een gewoon punt.
2. $a_1b_2 = a_2b_1$. Het gaat nu om evenwijdige lijnen in het gewone vlak. Er is nu een oplossing van de vorm $(0, \cdot, \cdot)$, de homogene coördinaten van een oneindig ver punt.

Het projectieve vlak is het standaardmodel van de tweedimensionale *elliptische meetkunde*.

3. TOPOLOGIE VAN HET PROJECTIEVE VLAK

We zoeken nu een topologische voorstelling van het projectieve vlak. Daartoe proberen we een afstandsfunctie te introduceren. Hoe zou je de afstand tussen twee punten uit \mathbb{P}^2 meten? Volgens de definitie is een punt in \mathbb{P}^2 een lijn in \mathbb{R}^3 door O . De afstand tussen twee lijnen door O , dat lijkt wat vreemd. We bekijken de eenheidssfeer \mathbb{S}^2 in \mathbb{R}^3 , met middelpunt O en straal 1. Deze snijdt elke lijn door O in een paar van diametrale punten. In plaats van ‘paar van diametrale punten’ gebruiken we ook wel de term ‘antipodaal paar’. Vanuit topologisch standpunt is het projectieve vlak de verzameling van alle antipodale paren van \mathbb{S}^2 . De afstand tussen antipodale paren wordt op de gebruikelijke manier berekend; de afstand van het antipodale paar $\{p, p^a\}$ tot het antipodale paar $\{q, q^a\}$ is het minimum van de afstanden $d(p, q)$ en $d(p, q^a)$. Voor een geoeftend topoloog is dit een prima definitie van het (topologische) projectieve vlak.

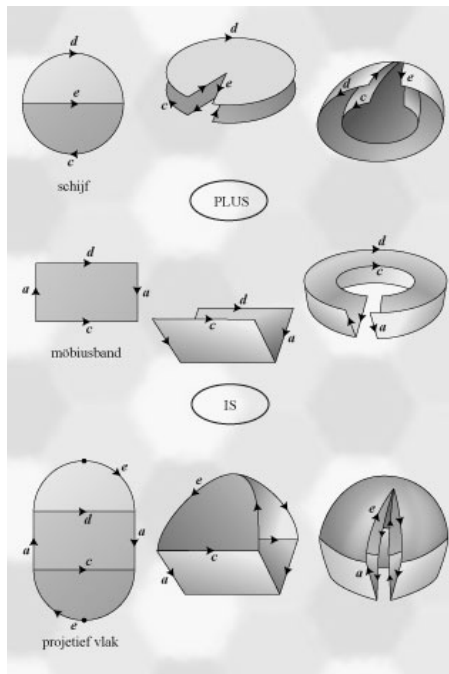


Figuur 4. Ontstaan van schijf met diametraalpuntsidentificatie en van bol met kruismuts

Een duidelijk en bruikbaar beeld van het projectieve vlak ontstaat op de volgende manier. In Figuur 4 (zie pagina 62 voor kleur) zien we links een sfeer; dit is de eenheidssfeer in \mathbb{R}^3 . Hiervan moeten we alle antipodale paren identificeren (op elkaar plakken). Om te beginnen ‘onthoofden’ we de sfeer; we verwijderen alle punten boven het equatorvlak. Wat overblijft is de onderste helft van de sfeer tezamen met zijn rand. Bijna alle punten van het projectieve vlak worden nu voorgesteld door één punt; de bijbehorende diametrale punten zijn bij de ‘onthoofding’ verdwenen. Op de rand zijn nog antipodale paren. Die moeten we paarsgewijs op elkaar plakken. Nu is een onthoofde bol topologisch niet anders dan een cirkelschijf. Zo komen we tot een voorstelling van het projectieve vlak die we in het vervolg nog vaak zullen gebruiken: *een schijf met diametraalpuntsidentificatie van de rand*. Het is dus een cirkelschijf met antipodale paren op de rand. Met pijltjes geven we eventueel aan hoe de bogen op de rand op elkaar geplakt worden. De afstand tussen twee punten is nu de kortste verbinding tussen de punten, waarbij men ook gebruik mag maken van het feit dat de afstand tussen twee diametrale punten op de rand gelijk aan 0 is.

Toch is het ook interessant om een voorstelling van het projectieve vlak te

maken waarbij elk punt gewoon een punt is en niet zoiets als een speciale lijn of bijzonder puntenpaar. We geven nu twee manieren waarop dit zou kunnen. De eerste manier sluit aan bij wat we net gedaan hebben. We gaan verder met de onderste helft van de sfeer tezamen met zijn rand van antipodale paren. Nu brengen we de te identificeren punten zo dicht mogelijk bij elkaar; dat kan met een topologische deformatie. Om nu het plakken mogelijk te maken moet het projectieve vlak zichzelf doorkruisen. Het kan ook niet anders, omdat het projectieve vlak niet zonder zelfdoorsnijding in de driedimensionale ruimte kan worden ingebed. De zojuist verkregen figuur wordt een *sfeer met kruismuts* genoemd.



Figuur 5. Het projectieve vlak is de som van een schijf en een Möbius-band

Een andere manier om een topologische voorstelling van het projectieve vlak te krijgen is geschetst in Figuur 5 (zie pagina 63 voor kleur). De figuur bestaat uit negen deelfiguren. Op de eerste rij staat drie keer een schijf, in de tweede rij staat driemaal een Möbius-band en op de derde rij driemaal het projectieve vlak. Het doel van de figuur is aan te tonen dat een schijf en Möbius-band, op passende wijze aan elkaar geplakt, het projectieve vlak opleveren. In de linkerkolom gebeurt dit schematisch en de rechterkolom laat zien hoe dat in de ruimte gerealiseerd wordt (met zelfdoorsnijding). De middelste kolom is een fase tussen de schematische en realistische benadering.

4. REGELMATIGE VEELVLAKKEN IN HET PROJECTIEVE VLAK

Ieder weet dat er maar vijf typen van regelmatige sferische veelvlakken zijn: de tetraëder, kubus, oktaëder, dodekaëder en icoesaëder, met opeenvolgend 4, 6, 8, 12 en 20 zijvlakken. Regelmatig wil hier zeggen dat alle zijvlakken van het veelvlak regelmatige veelhoeken zijn met evenveel hoeken en dat in ieder hoekpunt evenveel zijvlakken bij elkaar komen. Vaak geeft men het regelmatige veelvlak aan door de configuratie bij een hoekpunt op te schrijven. Bij bovenstaande opsomming krijgen we opeenvolgend (333), (444), (3333), (555), (33333). Meestal legt men aan de regelmatige veelvlakken de eis op dat ze convex zijn. We hebben dat hier vervangen door de voorwaarde dat het veelvlak vanuit topologisch standpunt de sfeer \mathbb{S}^2 is. Het doet er ook niet toe of de zijvlakken regelmatig zijn; wel is essentieel dat alle zijvlakken evenveel hoekpunten hebben. De gebruikelijke classificatie van de regelmatige en halfregelmatige veelvlakken, zie bijvoorbeeld [4] of [2], is alleen gebaseerd op de Formule van Euler:

$$Z - R + H = 2,$$

waarin Z , R , H de aantallen van opeenvolgend zijvlakken, ribben en hoekpunten zijn.

Bij toepassingen van de Formule van Euler is het irrelevant dat de ribben keurige rechte lijntjes zijn; het mogen ook wel kronkellijntjes (zonder dubbelpunten!) zijn. In de topologische context is een *regelmatig sferisch veelvlak* een verdeling van het boloppervlak in veelhoeken zó dat de veelhoeken twee aan twee slechts ribben gemeenschappelijk hebben, alle veelhoeken evenveel ribben hebben en in alle hoekpunten evenveel veelhoeken samenkomen. De ribben zijn topologische bogen. Een veelhoek wordt dus begrensd door een aantal bogen. Gemakshalve zullen we de veelhoeken vaak *zijden* noemen. Ook in deze context *zijn er precies vijf regelmatige sferische veelvlakken*. Voor de volledigheid zullen we dat hier bewijzen. Zij namelijk Z het aantal zijden van een regelmatig sferisch veelvlak, R het aantal ribben en H het aantal hoekpunten, n het aantal ribben van elke zijde en k het aantal veelhoeken die in elk hoekpunt samenkomen. Merk op dat altijd al $n \geq 3$ en $k \geq 3$. Tel eerst de hoekpunten via de zijden: er zijn Z zijden; die leveren nZ hoekpunten. Hierbij wordt ieder hoekpunt k keer geteld. Dus $nZ = kH$. Tel nu de hoekpunten via de ribben: er zijn R ribben; die leveren $2R$ hoekpunten. Maar ieder hoekpunt wordt hierbij k maal geteld. Dus $2R = kH$. Invulling in de Formule van Euler geeft:

$$H\left(\frac{k}{n} - \frac{k}{2} + 1\right) = 2.$$

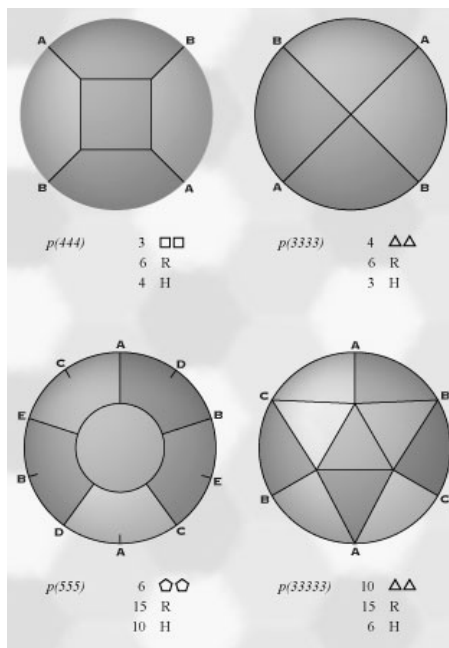
Omdat $H > 0$, moet ook $\frac{k}{n} - \frac{k}{2} + 1 > 0$. Daaruit volgt $3 \leq n < \frac{2k}{k-2}$, en dus $k < 6$. Bijgevolg $k = 3$, $k = 4$ of $k = 5$. Voor $k = 3$ komt er $n < 6$, en dus $n = 3$ ($H = 4$, de tetraëder), $n = 4$ ($H = 8$, de hexaëder of kubus) of $n = 5$ ($H = 20$, de dodekaëder.) Voor $k = 4$, krijgen we $n < 4$, dus $n = 3$ ($H = 6$, de oktaëder.) Voor $k = 5$ ten slotte: $n = 3$ ($H = 12$, de icoesaëder.)

Ter introductie van de regelmatige projectieve veelvlakken het volgende. We gaan uit van een regelmatig veelvlak op de sfeer \mathbb{S}^2 dat invariant is ten opzichte van de inversie ι in het middelpunt; d.w.z dat de afbeelding $\iota(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$

het veelvlak in zichzelf overvoert (dus hoekpunten in hoekpunten, ribben in ribben, zijden in zijden). Merk op dat ieder antipodaal paar door de afbeelding ι in zichzelf wordt overgevoerd. Dus geeft het regelmatig sferische veelvlak op natuurlijke wijze een regelmatig projectief veelvlak in de volgende zin.

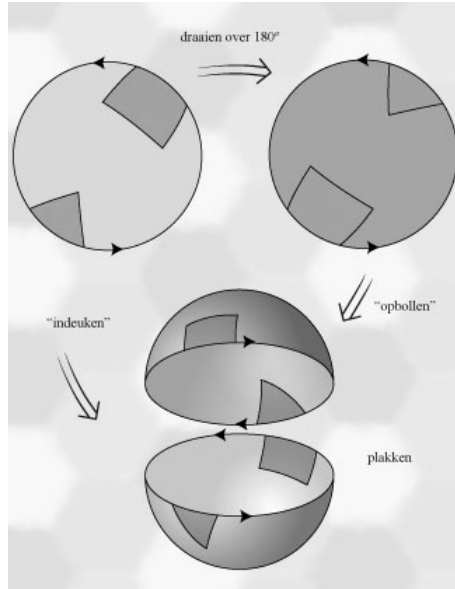
Definitie. Een *projectief veelvlak* is een verdeling van het projectieve vlak in veelhoeken zó dat de veelhoeken twee aan twee slechts ribben gemeenschappelijk hebben. Men noemt het veelvlak *regelmatig* als alle veelhoeken evenveel ribben hebben en in alle hoekpunten evenveel veelhoeken samenkomen.

Ook nu zullen we de veelhoeken vaak *zijden* noemen. Het tetraëder is regelmatig, maar niet invariant onder inversie; de tetraëder geeft dus *geen* aanleiding tot een regelmatig projectief veelvlak. Maar de andere regelmatige veelvlakken doen het wel. De kubus, oktaëder, dodekaëder en icosaaëder geven na identificatie van antipodenparen regelmatige projectieve veelvlakken die we opeenvolgend projectieve kubus, projectieve oktaëder, projectieve dodekaëder en projectieve icosaaëder noemen. Ze zijn getekend in Figuur 6 (zie pagina 64 voor kleur). In samenhang met de boven gegeven notatie voor regelmatige sferische veelvlakken noteren we de veelvlakken opeenvolgend met $p(444)$, $p(3333)$, $p(555)$ en $p(33333)$. Zijn dit nu alle regelmatige projectieve veelvlakken? Ja, dat zijn alle regelmatige projectieve veelvlakken. Dat is een direct gevolg van de volgende stelling.



Figuur 6. De regelmatig projectieve veelvlakken

Verdubbelingsstelling. *Laat een projectief veelvlak gegeven zijn. Dan is er een sferisch veelvlak dat invariant is onder inversie en dat na identificatie van antipodenparen het gegeven projectieve veelvlak oplevert.*



Figuur 7. Verdubbelingsstelling

Het bewijs staat in Figuur 7 (zie pagina 65 voor kleur). We stellen het projectieve vlak voor door een cirkelschijf met antipodenparen op de rand en stellen ons voor dat daarin het gegeven projectieve veelvlak is getekend. Om te beginnen maken we nu een kopie die uit de eerste ontstaat door draaiing over 180 graden. De eerste cirkelschijf ‘deuken we in’ en de tweede ‘bollen we op’. Daarna plakken we de halve bollen op elkaar en *vergeten de identificatie van de antipodale paren op de rand*. Het zo verkregen sferisch veelvlak is invariant ten opzichte van inversie, dus na identificatie van antipodenparen ontstaat weer het gegeven projectieve veelvlak.

We merken nog op dat bij het verdubbelingsproces het aantal zijden van het veelvlak verdubbelt en ook het aantal ribben en het aantal hoekpunten. Deze beschouwing levert een bewijs voor de Formule van Euler.

Formule van Euler. *Als van een projectief veelvlak het aantal zijden gelijk is aan Z , het aantal ribben gelijk aan R en het aantal hoekpunten gelijk aan H dan is*

$$Z - R + H = 1.$$

Als we de tekening van de projectieve dodekaëder $p(555)$ bekijken, dan zien we dat die bestaat uit zes zijden die elk vijf ribben hebben. Iedere zijde grenst

aan de vijf anderen. Daaruit volgt bijna onmiddellijk dat er zes kleuren nodig zijn om dit veelvlak zó te kleuren dat aan elkaar grenzende zijden een verschillende kleur krijgen. Hiermee is de helft van de volgende stelling bewezen.

Zeskleurenstelling. *Ieder projectief veelvlak kan met zes kleuren gekleurd worden. Het veelvlak $p(555)$ kan niet met minder dan zes kleuren gekleurd worden.*

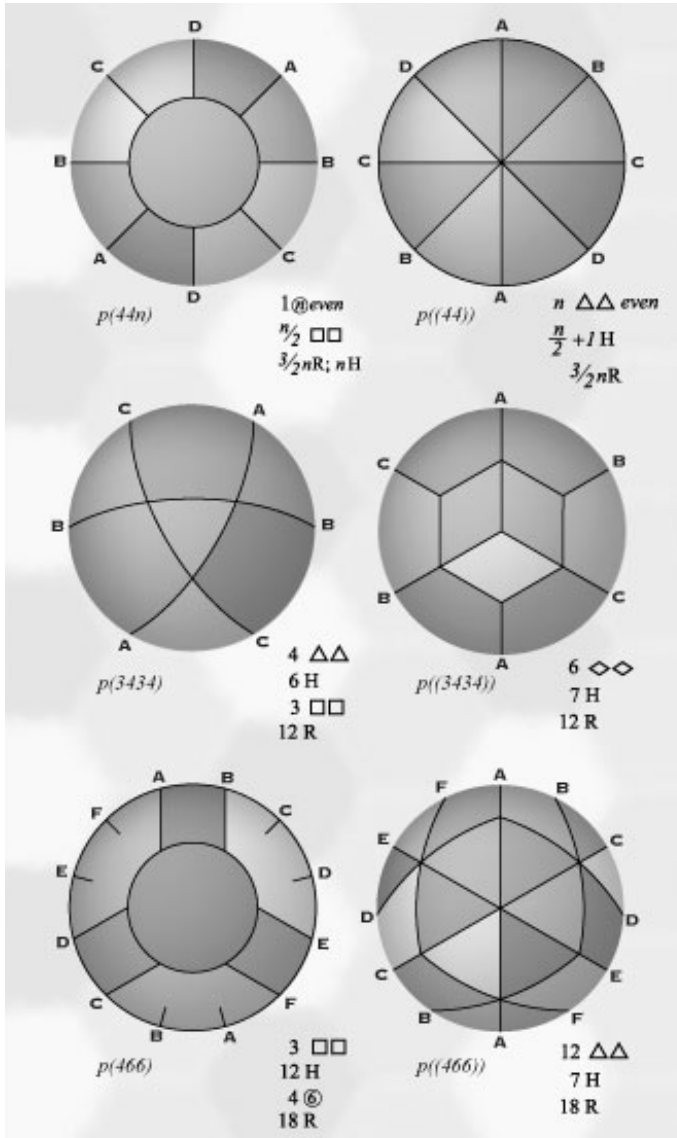
Het zou te ver voeren om hier een gedetailleerd bewijs van de Zeskleurenstelling te geven. Voor degenen die enigszins vertrouwd zijn met de aanpak van zulke bewijzen volstaat wellicht het volgende. Als we aannemen dat in ieder hoekpunt van het veelvlak precies drie zijden samenkomen, dan is de volgende uitgebreide Formule van Euler van kracht. Is Z_k het aantal zijden met k ribben, dan is

$$3Z_3 + 2Z_4 + Z_5 = 6 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)Z_k.$$

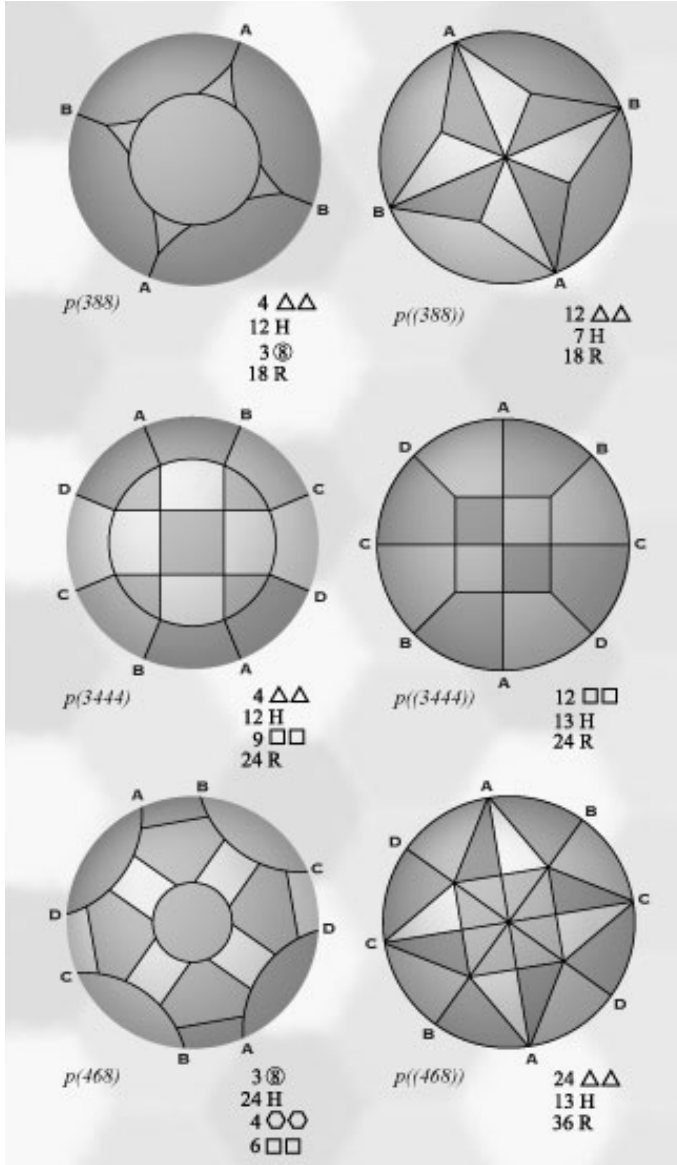
Uit de formule volgt dat er bij deze veelvlakken altijd zijden bestaan met vijf of minder ribben.

5. HALFREGELMATIGE PROJECTIEVE VEELVLAKKEN

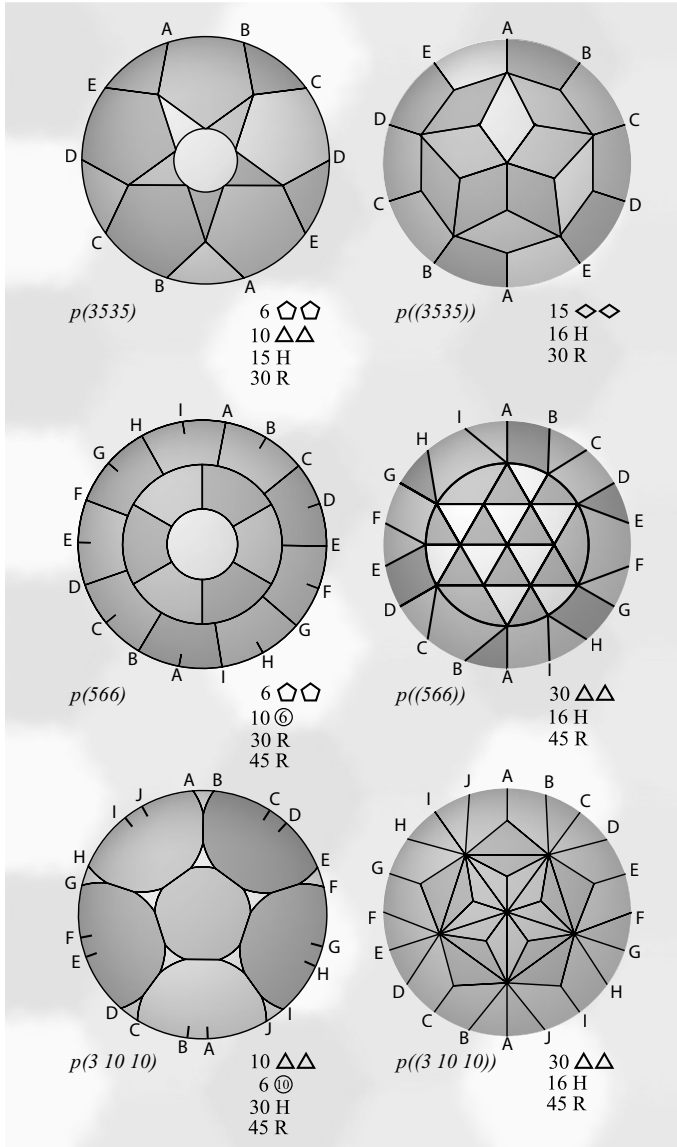
Naast de regelmatige projectieve veelvlakken kunnen ook nog de halfregelmatige veelvlakken van de eerste en tweede soort bekijken. We noemen een projectief veelvlak *halfregelmatig van de eerste soort* indien voor ieder hoekpunt de configuratie van de zijden die in dat hoekpunt samenkomen dezelfde is. In het bijzonder komen in ieder hoekpunt evenveel zijden samen. De halfregelmatige veelvlakken van de eerste soort worden ook wel *Archimedische* of *uniforme* veelvlakken genoemd. Door rolverwisseling van zijden en hoekpunten komt er de definitie van halve regelmaat van de tweede soort. Een projectief veelvlak heet *halfregelmatig van de tweede soort* indien voor iedere zijde de hoekpunten rond die zijde ‘hetzelfde patroon hebben.’ In de Figuren 8, 9, 10 en 11 op pagina 15–18 of pagina 66–69 (kleur) is een overzicht gegeven van alle halfregelmatige projectieve veelvlakken.



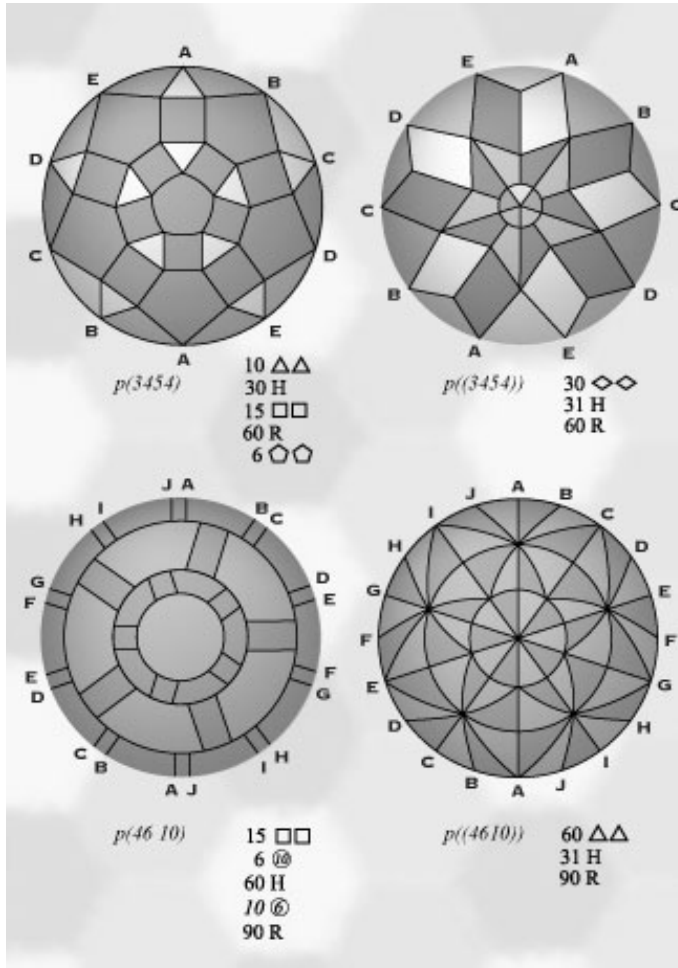
Figuur 8. Halfregelmatige projectieve veelvlakken I; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort



Figuur 9. Halfregelmatige projectieve veelvlakken II; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort



Figuur 10. Halfregelmatige projectieve veelvlakken III; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort



Figuur 11. Halfregelmatige projectieve veelvlakken IV; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort

Bij iedere figuur staan in de linkerkolom de halfregelmatige veelvlakken van de eerste soort, in de rechterkolom de halfregelmatige veelvlakken van de tweede soort. De reeks is op de volgende wijze tot stand gekomen. Volgens de Verdubbelingsstelling kan ieder halfregelmatig projectief veelvlak door identificatie van antipodenparen worden verkregen uit een sferisch halfregelmatig veelvlak dat invariant is onder inversie. Dit is nu wat je te doen staat. Neem de lijst van halfregelmatige veelvlakken, bijvoorbeeld uit Van der Vegt [4]. Deze lijst van halfregelmatige sferische veelvlakken geeft in verband met de Verdubbelingsstelling een volledige lijst van halfregelmatige projectieve veelvlakken. Het enige waar je op moet letten is dat het halfregelmatige veelvlak *invariant is onder inversie*. Alleen *die* halfregelmatige veelvlakken geven aanleiding tot

halfregelmatige projectieve veelvlakken. In de figuren zijn dezelfde namen gebruikt als in het sferische geval. Ook de andere notatie vertoont grote gelijkenis met die van [4].

6. DE HEPTAËDER

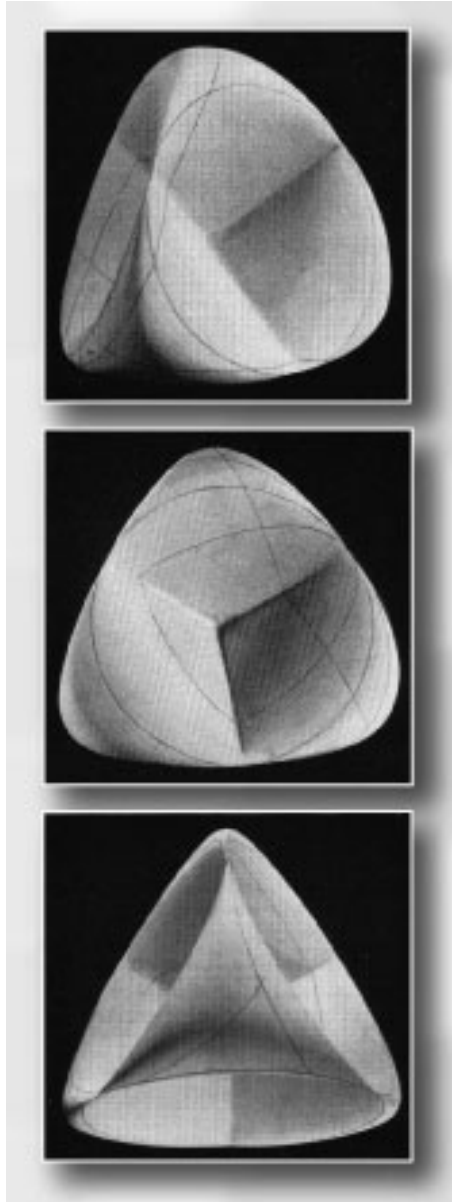
We lichten een enkel speciaal geval uit de lijst. Het halfregelmatige (sferische) veertienvlak, de kubo-oktaëder (3434), dat ontstaan gedacht kan worden als doorsnede van een kubus en een oktaëder en dat is opgebouwd uit zes vierkanten en acht gelijkzijdige driehoeken, gaat door identificatie van antipodale paren over in de *heptaëder*, $p(3434)$. Als je nu wilt weten wat er gebeurt bij afknotten van de heptaëder, dan kun je net zo goed eerst de kubo-oktaëder afknotten en daarna de antipodenparen identificeren. Nu kun je de kubo-oktaëder op twee wijzen afknotten: tot op de helft of tot op eenderde. Bij afknotten tot op de helft ontstaat er een veelvlak dat invariant is onder inversie en dat in topologische zin een romben-kubo-oktaëder (3444) is. Na identificatie van antipodenparen krijgen we het projectieve veelvlak $p(3444)$, dat is opgebouwd uit vier driehoeken en negen vierkanten, een dertienvlak. Bij afknotten tot op eenderde ontstaat er uit de kubo-oktaëder een veelvlak dat invariant is onder inversie en dat in topologische zin een grote romben-kubo-oktaëder (468) is. Na identificatie van antipodenparen krijgen we het projectieve veelvlak $p(468)$, dat is opgebouwd uit drie achthoeken, vier zeshoeken en zes vierkanten, ook een dertienvlak.

7. NOGMAALS HET PROJECTIEVE VLAK

We hebben ondertussen begrepen dat de heptaëder een model is voor het projectieve vlak. In het boek van Hilbert en Cohn-Vossen worden verschillende voorbeelden gegeven van gladde oppervlakken die model zijn voor het projectieve vlak, [3, p. 267, p. 280, p. 300]. Allereerst is er het algebraïsch oppervlak van Steiner dat gedefinieerd is door de vergelijking

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz.$$

Het oppervlak ziet er inderdaad uit als een minder hoekige variant van de heptaëder, Figuur 12 op pagina 20. Ook bij het oppervlak van Steiner is er zelfdoorsnijding. Je kunt zo narekenen dat de coördinaatassen de lijnen van zelfdoorsnijding zijn. Het punt $(1, 1, 1)$ ligt op het oppervlak; welke punten nog meer? In de figuur zie je ook punten waar de kromming van het oppervlak niet continu is, namelijk de eindpunten van de lijnstukken van zelfdoorsnijding.



Figuur 12. Het romeins oppervlak van Steiner

De wiskundige Boy heeft een voorstelling van het projectieve vlak gemaakt die overal een continue kromming heeft [3, p. 280-283], [1]. Je vraagt je misschien af waarom er altijd zelfdoorsnijding is bij de voorstelling van het projectieve vlak in de ruimte. De reden daarvoor is de volgende. Het projectieve

vlak is een *compact oppervlak*, d.w.z. in ieder punt ziet het projectieve vlak er bij benadering uit als een stukje uit het platte vlak (ieder punt heeft een omgeving die homeomorf is met \mathbb{R}^2) en het projectieve vlak is als deel van een \mathbb{R}^n altijd begrensd en gesloten. Nu is er de volgende generalisatie van de Stelling van Jordan voor de ruimte: een compact oppervlak dat topologisch (in dit bijzondere geval continu en eeneenduidig) in de ruimte is ingebed verdeelt de ruimte in twee delen. We hebben gezien dat het projectieve vlak geplaatst in de ruimte dat niet doet. Daarom moet er altijd zelfdoorsnijding zijn.

Je bent pas verlost van het verschijnsel van zelfdoorsnijding als je naar de \mathbb{R}^4 gaat. In [3, p. 300] wordt de volgende inbedding (dus echt één-één en zonder zelfdoorsnijding) van het projectieve vlak in \mathbb{R}^4 gegeven. Zoals we in paragraaf 3 gezien hebben is het projectieve vlak \mathbb{P}^2 topologisch de \mathbb{S}^2 met identificatie van antipodenparen. We kunnen de \mathbb{S}^2 dus gebruiken om het projectieve vlak te parameteriseren. De vergelijking van \mathbb{S}^2 is

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ieder punt uit \mathbb{P}^2 heeft twee parameters; als $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ als parameter van een punt van \mathbb{P}^2 optreedt, dan ook $(-x, -y, -z)$. Definieer nu $f(x, y, z) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ door

$$u_1 = x^2 - y^2, \quad u_2 = xy, \quad u_3 = xz \quad u_4 = yz.$$

Het is direct duidelijk dat $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$ voor alle x, y, z . Dus de beide parameters van een punt uit \mathbb{P}^2 hebben hetzelfde beeld; f geeft dus een deugdelijke afbeelding van \mathbb{P}^2 naar \mathbb{R}^4 . Hij is ook continu. Dat f ook éénéénduidig (en dus topologisch) is, zullen we slechts gedeeltelijk bewijzen. We bewijzen het in het geval dat $u_2 u_3 u_4 \neq 0$; het andere geval mag je zelf proberen of in [3] opzoeken. Als $u_2 u_3 u_4 \neq 0$ en $f(x, y, z) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, dan is ook $xyz \neq 0$. We vinden $x = \frac{u_2 u_3}{x y z}$, $y = \frac{u_2 u_4}{x y z}$, $z = \frac{u_3 u_4}{x y z}$, m.a.w. (x, y, z) en $(u_2 u_3, u_2 u_4, u_3 u_4)$ liggen op dezelfde lijn door O . Er is dus hooguit één antipodenpaar dat op (u_1, u_2, u_3, u_4) wordt afgebeeld.

LITERATUUR

1. F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, 1987
2. P.R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997
3. D. Hilbert en S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932, tweede uitgave 1996
4. A.K. van der Vegt, *Regelmaat in de ruimte*, Delftse Uitgevers Maatschappij, 1991
5. Magnus J. Wenniger, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1996

Symmetrie in islamitische ornamentale kunst

J. van de Craats
Koninklijke Militaire Academie
e-mail: J.vd.Craats@mindef.nl

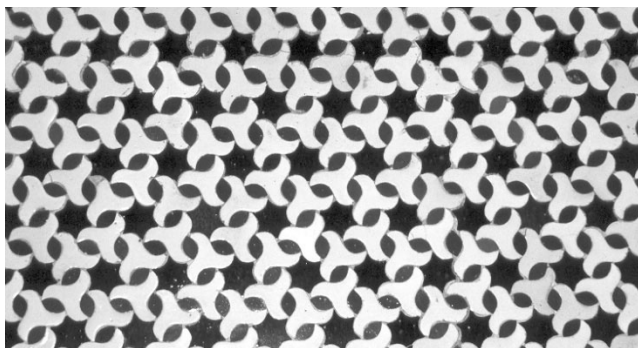
Wie in Andalusië de moorse paleizen en moskeeën, zoals het Alhambra in Granada, het Alcazar in Sevilla of de grote Mezquita-moskee in Cordoba bezoekt, wordt onmiddellijk getroffen door de verfijnde ornamenten en versieringen. Niet alleen daar, maar ook in de gehele Arabische wereld is zulke ornamentale kunst overvloedig aanwezig: sierlijk gekalligrafeerde Arabische teksten, rijkelijk bewerkte plafonds en mozaïekvloeren en intrigerende veelkleurige wandversieringen in de vorm van regelmatige patronen.

Wat bij die vlakvullingen vooral opvalt is de schier eindeloze variatie in de keuze van de motieven en de kleuren. Maar ook de aard van de symmetrieën vertoont allerlei variaties. Je ziet vierkanten, zeshoeken, stervormige achthoeken, twaalfhoeken, zestienhoeken en allerlei andere motieven die kunstig ineen gevlochten zijn en zich tot aan de randen toe steeds weer blijven herhalen. Sommige motieven zijn spiegelsymmetrisch, andere vertonen draaiingssymmetrie.

Als je zulke patronen met wiskundige ogen bekijkt, zie je abstracte onderliggende structuren van symmetrietransformaties. Zoals bij alle abstracties, doe je daarmee de werkelijkheid geweld aan: je dringt de specifieke vormen van de motieven in het patroon naar de achtergrond, en concentreert je op de rotaties en spiegelingen die het patroon als geheel in zichzelf overvoeren. Wanneer de motieven van een patroon zich in een of meer richtingen herhalen, zal de wiskundige het patroon in gedachten onbepert periodiek voortzetten, ook al is het in werkelijkheid begrensd. We denken ons in dat die begrenzing een soort ‘venster’ vormt waarachter het patroon zich onbepert voortzet. In dat geval heeft dat onbegrensd patroon ook translaties als symmetrieën.

Neem bijvoorbeeld het patroon van Figuur 1 op pagina 24.¹ We zien een samenstel van gebogen driepuntige sterren binnen een rechthoekige begrenzing. Wanneer we dat patroon in gedachten naar alle kanten onbepert voortzetten, zijn er tal van translaties die het patroon in zichzelf overvoeren. Maar ook onder een rotatie over 120 graden rond het middelpunt van zo’n ster gaat het patroon als geheel in zichzelf over. Er zijn verder rotaties over 180 graden en rotaties over 60 graden die het patroon in zichzelf overvoeren. Zulke translaties en rotaties noemen we *symmetrieën* van het patroon. Ze brengen een *groep* voort, de *symmetriegroep* van het patroon.

¹ Zie pagina 70 voor een kleurenversie van Figuur 1.



Figuur 1. Een patroon uit het Alcazar in Sevilla

Tijdens de voordracht zullen we veel voorbeelden van islamitische patronen gebruiken. In deze syllabustekst concentreren we ons op de wiskundige achtergronden; we geven slechts een beperkt aantal illustraties. Deze tekst kan natuurlijk ook als leidraad dienen bij de analyse van decoratieve patronen uit andere culturen. Zoals al eerder gezegd: de wiskundige, groepentheoretische analyse leert ons alleen iets over de onderliggende structuur, en niets over de specifieke motieven, het kleurgebruik en tal van andere artistiek belangrijke zaken. Bovendien zal blijken dat kleine veranderingen in het patroon de symmetriegroep radikaal kunnen veranderen, terwijl er artistiek gezien nauwelijks iets gewijzigd wordt. Zo kunnen bijvoorbeeld kleine verstoringen alle spiegelsymmetrieën verwijderen.

Met al dit voorbehoud moet toch vastgesteld worden dat het determineren van symmetriegroepen een uitermate boeiende en stimulerende bezigheid kan zijn. We hopen ons enthousiasme hiervoor op de deelnemers van de Vakantie-cursus te kunnen overbrengen, en via hen ook op grote groepen scholieren.

1. SYMMETRIEGROEPEN

We maken eerst enige terminologie-afspraken. Bij een gegeven figuur \mathbf{F} in het vlak (zo'n figuur kan van alles zijn: een al dan niet begrensd vlakdeel, een stel punten, een al dan niet begrensd patroon) noemt men een isometrie \mathcal{I} van het vlak een *symmetrie van \mathbf{F}* als $\mathcal{I}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$. Onder een isometrie van het vlak verstaat men daarbij een afbeelding van het vlak op zichzelf die afstanden van puntenparen niet verandert. Voorbeelden van isometrieën zijn lijnspiegelingen, rotaties, translaties en glijspiegelingen (een glijspiegeling is een spiegeling in een lijn gevolgd door een translatie langs die lijn). In de Appendix op de bladzijden 30 e.v. laten we zien dat *elke* isometrie van een van deze vier gedaanten is. In het vervolg zullen we herhaaldelijk gebruikmaken van de resultaten die in de Appendix vermeld staan, sommige in de vorm van een stelling, andere in de vorm van een opgave.

De symmetrieën van \mathbf{F} vormen een groep, de symmetriegroep $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ van \mathbf{F} . Voor elke figuur \mathbf{F} geldt:

1. De identieke afbeelding (id) is bevat in $\mathbf{S}(\mathbf{F})$.
2. Als $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \mathbf{S}(\mathbf{F})$ dan ook $\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1 \in \mathbf{S}(\mathbf{F})$. Let er hierbij op dat we het product $\mathcal{I}_2\mathcal{I}_1$ *van rechts naar links* lezen, dus eerst \mathcal{I}_1 en dan \mathcal{I}_2 .
3. Als $\mathcal{I} \in \mathbf{S}(\mathbf{F})$ dan ook $\mathcal{I}^{-1} \in \mathbf{S}(\mathbf{F})$.

We geven drie voorbeelden:

1. \mathbf{F} is een cirkel met middelpunt M . $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ bestaat dan uit alle rotaties met centrum M en alle spiegelingen in lijnen door M .
2. \mathbf{F} is een vierkant met middelpunt M . $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ bestaat dan uit de rotaties met centrum M over hoeken van $\frac{1}{2}k\pi$ (met $k = 0, 1, 2, 3$) en de spiegelingen in de beide diagonalen en de beide verbindingslijnen van de middens van diametrale zijden.
3. \mathbf{F} is de grafiek van de functie $f(x) = \sin x$. $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ bevat dan onder andere alle horizontale translaties over gehele veelvoudigen van 2π , en verder zekere spiegelingen in verticale lijnen, puntspiegelingen en glijspiegelingen met de x -as als glijspiegelas.

Het eerste voorbeeld bevat in zekere zin ‘te veel’ symmetrie: we zullen in het vervolg slechts figuren bekijken met een *discrete* symmetriegroep, dat wil zeggen dat er bij elk punt P in het vlak een omgeving van P is die buiten P zelf geen beelden van P onder isometrieën uit de symmetriegroep bevat. De voorbeelden 2 en 3 zijn discreet.

Bevat een discrete symmetriegroep niet-triviale translaties (dat wil zeggen translaties met een positieve translatieafstand), dan is er in elke translatierichting een translatie \mathcal{T} met een *minimale positieve* translatieafstand. Elke translatie in die richting is dan te schrijven als \mathcal{T}^n voor zekere gehele n . Zijn er translaties in minstens twee verschillende richtingen, dan zijn er altijd twee translaties \mathcal{T}_1 en \mathcal{T}_2 te vinden zo, dat elke translatie uit de symmetriegroep van de vorm $\mathcal{T}_1^n\mathcal{T}_2^m$ is voor zekere gehele waarden van n en m .

Bevat een discrete symmetriegroep niet-triviale rotaties (dat wil zeggen rotaties die niet de identieke afbeelding zijn) met een centrum M , dan is er een rotatie \mathcal{R} met centrum M en *minimale positieve* rotatiehoek. Die hoek moet gelijk zijn aan $\frac{2\pi}{n}$ voor zekere positieve gehele n . De rotaties in de symmetriegroep met centrum M zijn dan \mathcal{R}^k met $k = 0, \dots, n-1$. Men noemt M in dit geval een n -voudig rotatiecentrum, of, kortweg, een n -centrum.

Als M een n -centrum is en \mathcal{I} is een willekeurige symmetrie uit de symmetriegroep, dan is $\mathcal{I}(M)$ ook een n -centrum.

2. ROZETPATRONEN

In deze sectie onderzoeken we patronen waarvan de symmetriegroep discreet is en geen niet-triviale translaties bevat. Zo'n patroon zullen we een *rozetpatroon* noemen om redenen die zo dadelijk duidelijk worden. Er kunnen in zo'n groep geen glijspiegelingen voorkomen, want het kwadraat van een glijspiegeling is

een translatie. Zo'n groep kan dus alleen maar bestaan uit rotaties en lijnspiegelingen.

Als er meer dan één lijnspiegeling in de symmetriegroep voorkomt, moeten alle spiegellijnen door één punt gaan, want anders zijn er ook weer translaties (als er twee evenwijdige spiegellijnen zijn) of glijspiegelingen (als er drie assen zijn die niet door één punt gaan en niet onderling evenwijdig zijn). Noem het snijpunt van alle spiegellijnen O . Omdat de groep discreet is, kunnen er maar eindig veel assen zijn. Als het er n zijn, moeten ze opvolgend gelijke hoeken van $\frac{\pi}{n}$ met elkaar maken. Noemen we één spiegelas m_0 dan ontstaan de andere assen m_1 tot en met m_{n-1} uit m_0 door rotatie om O over een hoek $\frac{k\pi}{n}$ ($k = 1, \dots, n-1$). De bijbehorende lijnspiegelingen noemen we $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{n-1}$.

Het product $\mathcal{R}_k = \mathcal{S}_k \mathcal{S}_0$ is een rotatie met centrum O en rotatiehoek $\frac{2k\pi}{n}$. De groep bevat dus naast de n lijnspiegelingen ook nog n rotaties om O (inclusief de identiteit (*id*)). Het is een eenvoudige opgave om te bewijzen dat de symmetriegroep verder geen andere symmetrieën kan bevatten. Het gaat hier dus om een groep met $2n$ elementen die de *dihedrale groep* \mathbf{D}_n genoemd wordt. Voor $n \geq 3$ is dit de symmetriegroep van een regelmatige n -hoek.

Een rozet met symmetriegroep \mathbf{D}_6



Een rozet met symmetriegroep \mathbf{C}_6



Figuur 2. Turkse rozetpatronen

De n rotaties in \mathbf{D}_n vormen een ondergroep van index 2, de zogenaamde *cyclische groep* \mathbf{C}_n . Patronen met als symmetriegroep een dihedrale groep of een cyclische groep noemt men wel *rozetpatronen*. Ze zijn er voor elke $n \geq 1$, en andere eindige symmetriegroepen zijn er niet. In Figuur 2² staan voorbeelden van rozetten met symmetriegroep \mathbf{D}_6 en \mathbf{C}_6 .

3. STROOKPATRONEN

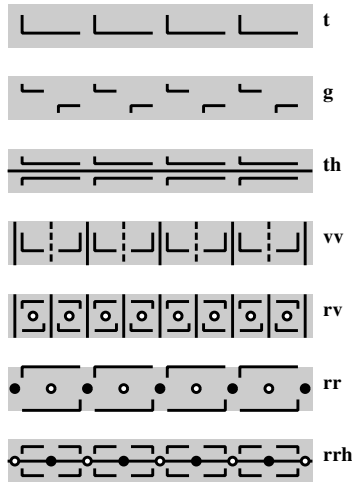
We bekijken nu patronen waarvan de symmetriegroep discreet is en translaties in slechts één richting bevat. Zulke patronen noemen we *strookpatronen*. We nemen die richting horizontaal. Er moet dan een translatie zijn met een minimale positieve translatieafstand (want de groep is discreet). Stel dat dit \mathcal{T} is, en dat $d > 0$ de translatieafstand is. Elke andere translatie is van de vorm \mathcal{T}^n voor zekere gehele n .

² Zie pagina 70 voor kleurenversies van Figuur 2.

Als de symmetriegroep niet-triviale rotaties bevat, kan de rotatiehoek van zo'n rotatie alleen maar π zijn. Er zijn dus alleen maar 2-centra (indien aanwezig). Bovendien moeten al die centra op één horizontale lijn liggen, want de opeenvolging van zulke rotaties in twee verschillende centra is een translatie over de dubbele afstand van die centra. De afstand tussen twee rotatiecentra is dus een geheel veelvoud van $\frac{1}{2}d$.

Als de symmetriegroep van een strookpatroon spiegelingen bevat, moet de spiegelas horizontaal of verticaal zijn. Er kan hoogstens één horizontale spiegelas zijn. Verticale spiegellijnen hebben een onderlinge afstand die een geheel veelvoud is van $\frac{1}{2}d$.

Als de symmetriegroep van een strookpatroon glijspiegelingen bevat, moet de spiegelas horizontaal zijn want het kwadraat van een glijspiegeling is een translatie. De translatieafstand van de translatiecomponent in een glijspiegeling is een oneven veelvoud van $\frac{1}{2}d$.



Figuur 3. De zeven strookpatronen

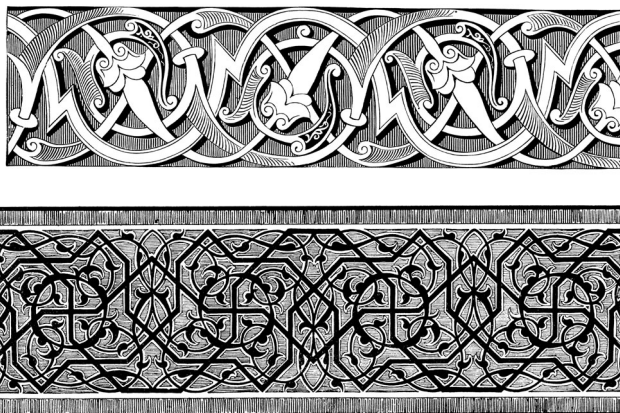
In Figuur 3 zijn de zeven mogelijke symmetriegroepen van strookpatronen in beeld gebracht aan de hand van eenvoudige voorbeelden. De breedte van het getoonde stuk is telkens $4d$. De hier gehanteerde namen van de groepen zijn ontleend aan karakteristieke isometrieën of combinaties ervan. In **t** zijn er alleen maar translaties. De groep **g** wordt voortgebracht door een glijspiegeling. In de groep **th** zitten translaties en een horizontale spiegeling. In de groep **vv** zijn er verticale spiegelingen in twee verschillende soorten assen. In **rv** vinden we rotaties en spiegelingen in verticale assen die niet door een rotatiecentrum gaan. In **rr** zijn er twee soorten rotatiecentra, aangegeven door witte en zwarte punten, en in **rrh** worden die ook nog gecombineerd met een horizontale spiegeling. Aan de hand van het schema van Figuur 4 op pagina 28 kun je de symmetriegroep bij elk strookpatroon gemakkelijk determineren.

In Figuur 5 op pagina 28 zien we twee voorbeelden van Arabische strook-

Zijn er tweevoudige rotatiecentra?		
Ja.	Horizontale spiegeling?	
	Ja.	→ rrh
	Nee.	Verticale spiegeling?
	Ja.	→ rv
	Nee.	→ rr
Nee.	Horizontale spiegeling?	
	Ja.	→ th
	Nee.	Glijspiegeling?
	Ja.	→ g
	Nee.	Verticale spiegeling?
	Ja.	→ vv
	Nee.	→ t

Figuur 4. Determinatieschema voor strookpatronen

patronen. De bijbehorende symmetriegroepen zijn **g** en **rv**.



Figuur 5. Twee Arabische strookpatronen

4. BEHANGPATRONEN

Wanneer de symmetriegroep van een patroon discreet is en translaties in minstens twee verschillende richtingen bevat, spreekt men van een *behangpatroon* (Engels: *wallpaper pattern*) omdat veel patronen op behangpapier deze eigenschap hebben. De symmetriegroep van zo'n patroon noemen we een behangpatroongroep.

De kristallograaf E.S. Fedorov bewees in 1891 dat er precies 17 verschillende behangpatroongroepen zijn. Omdat zijn artikel in het Russisch geschreven was, bleef het lang onbekend. Zijn resultaat werd in 1924 herontdekt door G. Pólya en P. Niggli. In de moorse paleizen in Andalusië en op andere plaatsen in

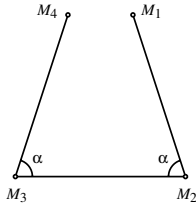
de Arabische wereld kan men alle 17 groepen gerealiseerd zien in schitterende wanddecoraties. Wij zullen hier een overzicht van die 17 groepen geven en een stroomschema waarmee zo'n patroon kan worden gedetermineerd. De notaties die we voor de verschillende groepen zullen gebruiken, zijn ontleend aan de *International Tables for X-ray Crystallography*.

4.1. De kristallografische beperking

De classificatie van de behangpatroongroepen wordt vereenvoudigd door gebruik te maken van de volgende stelling, die bekend staat als de kristallografische beperking.

Stelling (kristallografische beperking): In een behangpatroon kunnen alleen maar n -centra voorkomen met $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ of $n = 6$.

Bewijs: Stel M_1 is een n -centrum. Noem $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Elke isometrie \mathcal{I} uit de symmetriegroep die M_1 niet invariant laat, voert M_1 over in een ander n -centrum. Omdat de groep discreet is, is er een n -centrum M_2 met minimale positieve afstand tot M_1 . De rotatie \mathcal{R} met centrum M_2 en rotatiehoek α voert M_1 over in M_3 . Evenzo voert de rotatie \mathcal{R}' met centrum M_3 en rotatiehoek α het punt M_2 over in een punt M_4 . Omdat M_1 en M_2 n -centra zijn, zijn M_3 en M_4 het ook.



Figuur 6. Bij het bewijs van de kristallografische beperking

Als $n = 6$ vallen M_1 en M_4 samen. Als $n > 6$ ligt M_3 dichter bij M_1 dan M_2 en als $n = 5$ ligt M_4 dichter bij M_1 dan M_2 (zie Figuur 6). In deze beide gevallen ontstaat dus een tegenspraak, waarmee de stelling bewezen is. \square

We zullen zien dat 2-centra, 3-centra, 4-centra en 6-centra inderdaad allemaal in behangpatronen kunnen voorkomen.

4.2. Het determinatieschema

Bij het determineren van de symmetriegroep van een behangpatroon kijken we eerst naar de *maximale* waarde van n waarvoor er n -centra in het patroon voorkomen. Op grond van de kristallografische restrictie kan n alleen de waarden 2, 3, 4 en 6 aannemen. Als er in zo'n patroon geen rotaties voorkomen, stellen we $n = 1$. We hebben dus vijf hoofdcategorieën: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ en $n = 6$. Door vervolgens telkens ja/nee vragen te stellen, komen we uiteindelijk tot de determinatie van de symmetriegroep via het schema van bladzijde 31. De

eerste ja/nee vraag zal telkens zijn of er een lijnspiegeling in de groep aanwezig is.

Zoals uit Figuur 8 op bladzijde 32 blijkt, kunnen we bij elk van de 17 behangpatroongroepen voorbeelden van zo'n patroon vinden. Samen met het determinatieschema toont dit eigenlijk slechts aan dat er *minstens* 17 verschillende groepen zijn. Het is denkbaar dat er bij sommige eindpunten van de beslissingsboom van het schema twee of meer verschillende groepen horen, en dat er dus een nog fijnere verdeling nodig is. Men kan echter aantonen dat dit niet het geval is.

In Figuur 9 op pagina 33³ geven we vier voorbeelden van islamitische 'behangpatronen'. De bijbehorende symmetriegroepen zijn **p4m**, **pmg**, **p6** en **p3**.

5. APPENDIX. COÖRDINATENSTELSELS EN ISOMETRIEËN

Een vlak met punten en lijnen waarin voor elk tweetal punten P en Q een afstand $d(P, Q)$ gedefinieerd is, heet een *euclidisch vlak* als er een bijectie van dat vlak naar \mathbb{R}^2 bestaat met de volgende eigenschappen:

1. Elke lijn correspondeert met een verzameling in \mathbb{R}^2 van de vorm $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ waarin a en b niet beide nul zijn.
2. Voor elk tweetal punten P en Q met beelden (p_1, p_2) respectievelijk (q_1, q_2) in \mathbb{R}^2 geldt dat $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

Zo'n bijectie legt een *cartesisch coördinatenstelsel* vast. Het beeld (p_1, p_2) van een punt P onder die bijectie noemt men het *coördinatenpaar* van P . Men schrijft, enigszins slordig, $P = (p_1, q_1)$. In deze tekst werken we uitsluitend in een euclidisch vlak. We zullen de woorden 'cartesisch' en 'euclidisch' dan vaak weglaten, en eenvoudig spreken van 'een coördinatenstelsel in het vlak' als we 'een cartesisch coördinatenstelsel in het euclidische vlak' bedoelen.

Zo'n coördinatenstelsel is niet uniek bepaald: bij elk drietal punten A , B en C in het vlak die niet op één lijn liggen, is er een (wél uniek bepaald) coördinatenstelsel met de eigenschap dat $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ met $b > 0$ en $C = (c_1, c_2)$ met $c_2 > 0$. In algemeen gangbaar taalgebruik: A is de oorsprong van het coördinatenstelsel, B ligt op de positieve x -as en C ligt in het bovenhalfvlak.

Definitie: Een *isometrie* \mathcal{I} is een afbeelding van het vlak op zichzelf die afstanden behoudt, dat wil zeggen dat voor elk tweetal punten A en B in het vlak geldt dat $d(A, B) = d(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$.

Lemma: Als een isometrie \mathcal{I} twee verschillende punten A en B invariant laat, dat wil zeggen dat $\mathcal{I}(A) = A$ en $\mathcal{I}(B) = B$, dan laat \mathcal{I} elk punt van de lijn door A en B invariant.

Bewijs: Kies een coördinatenstelsel zo, dat $A = (0, 0)$ en $B = (b, 0)$ met $b > 0$ en stel dat $C = (c, 0)$ een ander punt op de lijn door A en B is. Als

³ Zie pagina 71 voor kleurenversies van Figuur 9.

<p><i>Stel n is de grootste waarde waarvoor er n-voudige rotatiecentra in het patroon voorkomen.</i></p> <p><i>Als er geen rotatiecentra zijn, nemen we $n = 1$.</i></p>	
$n = 1$.	Is er een lijnspiegeling?
<i>Ja.</i>	Is er een glijspiegeling die geen spiegelas is?
<i>Ja.</i>	→ cm
<i>Nee.</i>	→ pm
<i>Nee.</i>	Is er een glijspiegeling?
<i>Ja.</i>	→ pg
<i>Nee.</i>	→ p1
$n = 2$.	Is er een lijnspiegeling?
<i>Ja.</i>	Zijn er spiegelassen in twee richtingen?
<i>Ja.</i>	Liggen alle 2-centra op spiegelassen?
<i>Ja.</i>	→ pmm
<i>Nee.</i>	→ cmm
<i>Nee.</i>	→ pmg
<i>Nee.</i>	Is er een glijspiegeling?
<i>Ja.</i>	→ pgg
<i>Nee.</i>	→ p2
$n = 3$.	Is er een lijnspiegeling?
<i>Ja.</i>	Liggen alle 3-centra op spiegelassen?
<i>Ja.</i>	→ p3m1
<i>Nee.</i>	→ p31m
<i>Nee.</i>	→ p3
$n = 4$.	Is er een lijnspiegeling?
<i>Ja.</i>	Zijn er spiegelassen die elkaar onder een hoek van 45° snijden?
<i>Ja.</i>	→ p4m
<i>Nee.</i>	→ p4g
<i>Nee.</i>	→ p4
$n = 6$.	Is er een lijnspiegeling?
<i>Ja.</i>	→ p6m
<i>Nee.</i>	→ p6

Figuur 7. Determinatieschema voor behangpatronen

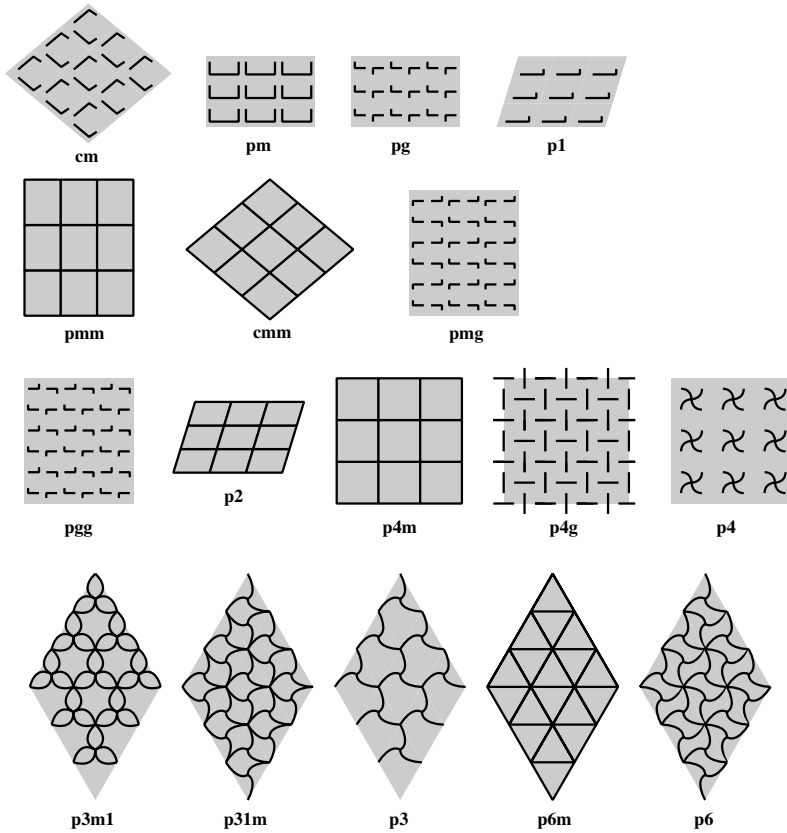
$\mathcal{I}(C) = (x, y)$ dan is $d(A, C) = d(A, \mathcal{I}(C))$ dus

$$c^2 = x^2 + y^2$$

en $d(B, C) = d(B, \mathcal{I}(C))$ dus

$$(c - b)^2 = (x - b)^2 + y^2.$$

Trekt men de tweede vergelijking van de eerste af, dan ontstaat na vereenvoudiging $2bc = 2bx$, dus $c = x$ want $b \neq 0$. Substitutie hiervan in de eerste



Figuur 8. De zeventien behangpatronen

vergelijking geeft vervolgens $y = 0$, en dus is $(x, y) = (c, 0)$. \square

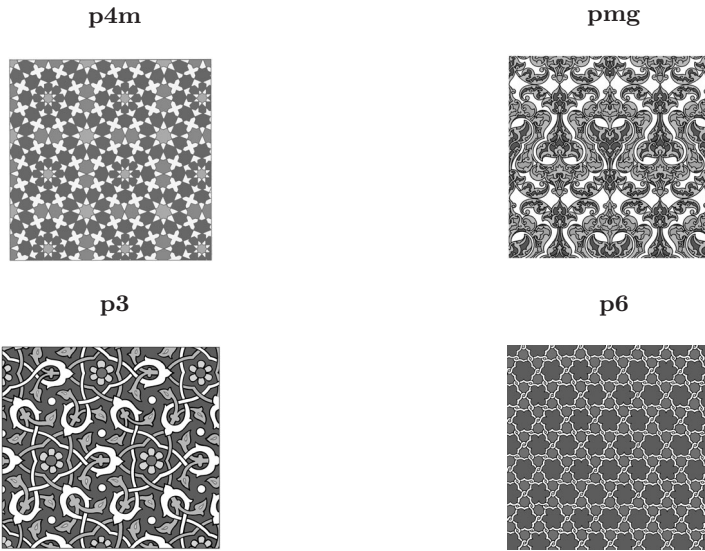
Stelling A.1: Als een isometrie \mathcal{I} drie punten, niet op één lijn, invariant laat, is het de identieke afbeelding (id).

Bewijs: Stel A , B en C zijn de gegeven invariante punten en P is een willekeurig ander punt. Als P op één van de lijnen AB , BC of CA ligt, is P invariant op grond van het lemma. Indien P niet op een van die lijnen ligt, is er een lijn door P die twee van die lijnen in twee verschillende punten snijdt. Die punten zijn invariant op grond van het lemma, en P dus ook, opnieuw op grond van het lemma. \square

Stelling A.2: Als een isometrie $\mathcal{I} \neq (id)$ twee invariante punten A en B heeft, is het de spiegeling in de lijn AB .

Bewijs: Kies een coördinatenstelsel zo, dat $A = (0, 0)$ en $B = (b, 0)$ met $b > 0$. Voor een punt $P = (x, y)$ met $y \neq 0$ en beeldpunt $P' = \mathcal{I}(P) = (x', y')$ geldt dan $d(A, P) = d(A, P')$ dus

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$$

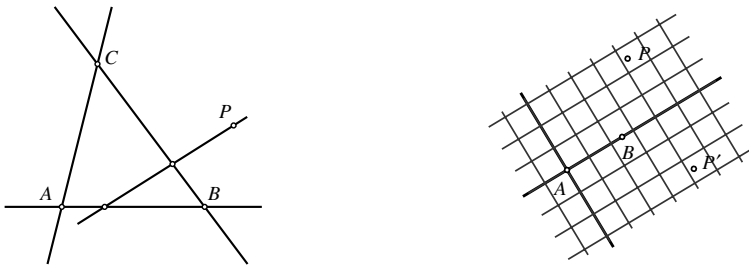


Figuur 9. Voorbeelden van islamitische patronen

en $d(B, P) = d(B, P')$ dus

$$(x - b)^2 + y^2 = (x' - b)^2 + (y')^2.$$

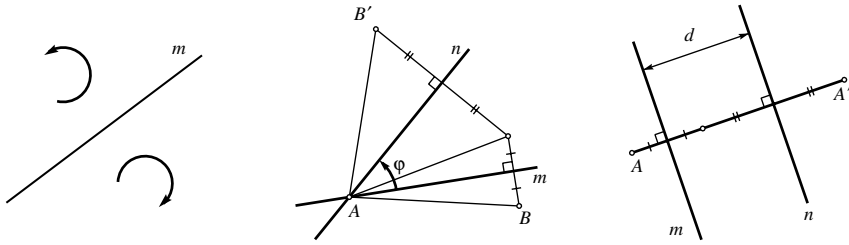
Aftrekken geeft $2bx = 2bx'$ dus $x = x'$ (want $b \neq 0$) en substitutie hiervan in de eerste vergelijking geeft $y = \pm y'$. Zou $y = y'$ zijn, dan zou $\mathcal{I} = (id)$ op grond van Stelling A.1. Dit is uitgesloten, en dus is $y = -y'$. Dit betekent dat \mathcal{I} inderdaad de spiegeling in de x -as is, dat wil zeggen de spiegeling in de lijn AB . \square



Figuur 10. Bij de bewijzen van Stelling A.1 (links) en Stelling A.2 (rechts)

5.1. Eigenschappen van lijnspiegelingen

Bij elke lijn m in het vlak is er een uniek bepaalde lijnspiegeling \mathcal{S}_m . Er geldt $\mathcal{S}_m^2 = (id)$, met andere woorden, twee maal spiegelen in dezelfde lijn geeft



Figuur 11. Lijnspiegelingen als bouwstenen van rotaties en translaties

hetzelfde resultaat als niets doen. Nog weer anders gezegd: een lijnspiegeling is zijn eigen inverse afbeelding, in formule $\mathcal{S}_m^{-1} = \mathcal{S}_m$.

Lijnspiegelingen keren de oriëntatie om: een linksom draaiende pijl wordt na een lijnspiegeling een rechtsom draaiende pijl en omgekeerd. (Zie Figuur 11, links.)

Als m en n twee lijnen zijn die elkaar in een punt A snijden, en de hoek φ , met $0 < \varphi < \pi$, is de tegen de klok in gemeten hoek tussen m en n , dan is de isometrie $\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$ (let op de volgorde: eerst \mathcal{S}_m toepassen en dan \mathcal{S}_n) de *rotatie* met centrum A en rotatiehoek 2φ . Voor elk punt $B \neq A$ met $B' = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m(B)$ geldt dan $\angle BAB' = 2\varphi$. (Zie Figuur 11, midden.)

Rotaties zijn oriëntatiebehoudend. Bij de ontbinding van een rotatie met centrum A in twee lijnspiegelingen in lijnen door A , kan één van de twee spiegellijnen vrij door A gekozen worden.

Een bijzondere rotatie is de *puntspiegeling* \mathcal{S}_A in A . De rotatiehoek is dan π , en A is het midden van het lijnstuk BB' voor elk punt B . Er geldt dat $\mathcal{S}_A^2 = (id)$ dus een puntspiegeling is, net als een lijnspiegeling, zijn eigen inverse. Bij de ontbinding van een puntspiegeling in twee lijnspiegelingen zijn de twee spiegellijnen onderling loodrecht. Omdat een rotatie over π hetzelfde effect geeft als een rotatie over $-\pi$, maakt de volgorde waarin de beide lijnspiegelingen worden uitgevoerd, in dit geval niets uit: als $m \perp n$ is $\mathcal{S}_m\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$.

Als m en n twee evenwijdige lijnen zijn met een onderlinge afstand $d > 0$, dan is de isometrie $\mathcal{S}_n\mathcal{S}_m$ (let weer op de volgorde: eerst \mathcal{S}_m toepassen en dan \mathcal{S}_n) de *translatie* over een afstand $2d$ in de richting loodrecht op m en n , gericht van m naar n . Voor elk punt A met beeld $A' = \mathcal{S}_n\mathcal{S}_m(A)$ geldt dan dat de vector met beginpunt A en eindpunt A' lengte $2d$ heeft en loodrecht staat op m en n . (Zie Figuur 11, rechts.)

Translaties zijn oriëntatiebehoudend. Bij de ontbinding van een translatie in twee lijnspiegelingen in evenwijdige lijnen, kan één van de twee spiegellijnen vrij gekozen worden, maar wel loodrecht op de translatierichting.

5.2. Classificatie van isometrieën

Stelling A.3: Elke isometrie \mathcal{I} is te schrijven als het product van maximaal drie lijnspiegelingen.

Bewijs: We onderscheiden drie gevallen:

1. \mathcal{I} heeft minstens twee invariante punten A en B . Dan is \mathcal{I} de identiteit of de lijnspiegeling in AB .
2. \mathcal{I} heeft precies één invariant punt A . Neem een ander punt B met beeldpunt $B' = \mathcal{I}(B)$. De middelloodlijn m van B en B' gaat door A want $d(A, B) = d(A, B')$. De isometrie $\mathcal{S}_m \mathcal{I}$ heeft dan de invariante punten A en B . Het kan niet de identiteit zijn, want dan zou $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m$ zijn, maar \mathcal{I} heeft slechts één invariant punt. Er geldt dus dat $\mathcal{S}_m \mathcal{I} = \mathcal{S}_{AB}$, dat wil zeggen dat $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \mathcal{S}_{AB}$. In dit geval is \mathcal{I} dus een *rotatie* met centrum A .
3. \mathcal{I} heeft geen invariante punten. Kies een willekeurig punt B met beeldpunt $B' = \mathcal{I}(B)$. Stel dat A het midden is van het lijnstuk BB' en dat \mathcal{S}_A de puntspiegeling in A is. De isometrie $\mathcal{S}_A \mathcal{I}$ heeft dan B als invariant punt. Er zijn nu weer twee mogelijkheden:

(a.) $\mathcal{S}_A \mathcal{I}$ is een rotatie met centrum B . Schrijf die rotatie als $\mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_p$ voor zekere lijn p door B (zie Figuur 12, links). Dan geldt voor de lijn q door A loodrecht op AB

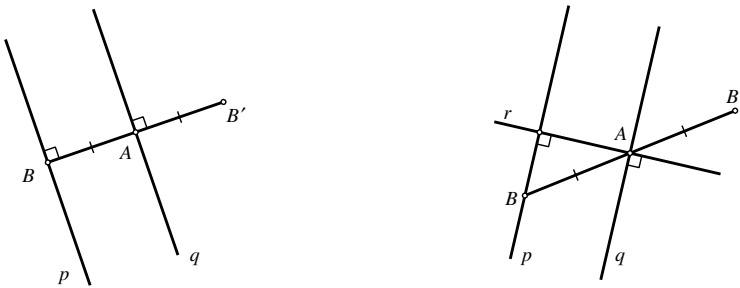
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_A \mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_{AB} \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p.$$

Dit kan geen rotatie zijn, want \mathcal{I} heeft geen invariante punten, dus het is een translatie, met andere woorden, p en q zijn evenwijdig en staan loodrecht op de lijn AB .

(b.) $\mathcal{S}_A \mathcal{I}$ is een lijnspiegeling in een lijn p door B . Schrijf $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_r$ met $p \parallel q \perp r$ (zie Figuur 12, rechts). Dan is

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_A \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_r \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p \mathcal{S}_r$$

de *glijspiegeling* met *glijspiegelas* r en *translatiecomponent* $\mathcal{S}_q \mathcal{S}_p$. Net als de lijnspiegelingen keren de glijspiegelingen de oriëntatie om. \square



Figuur 12. Bij het bewijs van Stelling A.3, geval (3a) (links) en geval (3b) (rechts)

In het bewijs van Stelling A.3 hebben we een volledig overzicht gekregen van alle mogelijke isometrieën van het vlak. De *oriëntatiebehoudende* isometrieën zijn de identiteit, de rotaties (waaronder de puntspiegelingen) en de translaties. De isometrieën die de *oriëntatie omkeren* zijn de lijnspiegelingen en de glijspie-

gelingen. Een glijspiegeling kan opgevat worden als een lijnspiegeling gevolgd door een translatie in de richting van de spiegelas. De volgorde kan daarbij ook worden omgekeerd: eerst de translatie en dan de lijnspiegeling; voor het resultaat maakt dat niets uit.

Opgave 1. Bewijs dat de opeenvolging van drie lijnspiegelingen een lijnspiegeling is als de drie spiegelassen door één punt gaan of onderling evenwijdig zijn, en een glijspiegeling in alle andere gevallen.

Opgave 2. Bewijs: als \mathcal{S} een lijnspiegeling met spiegelas m is en \mathcal{I} is een willekeurige isometrie, dan is $\mathcal{I}\mathcal{S}\mathcal{I}^{-1}$ een lijnspiegeling met spiegelas $\mathcal{I}(m)$.

Opgave 3. Bewijs: als \mathcal{R} een rotatie met centrum M is en \mathcal{I} is een willekeurige isometrie, dan is $\mathcal{I}\mathcal{R}\mathcal{I}^{-1}$ een rotatie met centrum $\mathcal{I}(M)$. Wat is de rotatiehoek?

Opgave 4. Stel \mathcal{R}_1 en \mathcal{R}_2 zijn rotaties met verschillende centra M_1 en M_2 en rotatiehoeken α_1 en α_2 , respectievelijk. Laat zien dat $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ een rotatie of een translatie is. Onderzoek wanneer het een translatie is en bepaal het centrum en de rotatiehoek wanneer het een rotatie is.

Opgave 5. Stel \mathcal{R}_1 en \mathcal{R}_2 zijn niet-triviale rotaties met verschillende centra M_1 en M_2 en rotatiehoeken α_1 en α_2 , respectievelijk. Laat zien dat $\mathcal{R}_2^{-1}\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ een niet-triviale translatie is. (Hieruit volgt dat een eindige symmetriegroep slechts hoogstens één rotatiecentrum kan hebben.)

LITERATUUR

Op het internet is heel veel materiaal te vinden over islamitische ornamentale kunst en wiskundige aspecten ervan. Ook zijn er veel websites gewijd aan vlakke symmetriegroepen in het algemeen. Ik heb zelf bij de voorbereiding van deze lezing gebruikgemaakt van het artikel van Schattschneider en de boeken van Fejes Tóth en Coxeter. Meer achtergronden bij wat in de Appendix wordt behandeld, staan in mijn bijdrage aan de CWI-Vakantiecursus 1998. Veel mooi beeldmateriaal is te vinden in de hieronder genoemde boekjes van *The Pepin Press*.

1. H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd. ed., John Wiley and Sons, Inc., 1969.
2. Jan van de Craats, De vlakke meetkunde terug op school, in: *Meetkunde, oud en nieuw*, Syllabus 44 van de Vakantiecursus 1998, CWI, Amsterdam, 1998, ISBN 9061964784.
3. Doris Schattschneider, *The plane symmetry groups: their recognition and notation*, American Mathematical Monthly 85 (1978), 439–450.
4. L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1965.
5. *Islamic Designs*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam 2002, ISBN 9057680289.
6. *Turkish Designs*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam 2002, ISBN 905768036X.

Kubische gipsmodellen

J. Top

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
e-mail: top@math@rug.nl

1. ZEVEN EN TWINTIG

Volgens een oude anekdote zal een op een willekeurig tijdstip wakker gemaakte meetkundige bij het horen van het getal 27 direct roepen: ‘Het aantal lijnen op een kubisch oppervlak!’ Het wordt wellicht automatisch bewaarheid door het vaak genoeg aan alle meetkundigen te vertellen. We zullen in onderstaande tekst ingaan op dit aantal 27, op de fraaie manier waarop dit al in de 19de eeuw werd gevisualiseerd, en op structuren en toepassingen waartoe het aanleiding geeft.

Voorbeeld: het kubische Fermat-oppervlak

De verzameling

$$F := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 ; z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 1 = 0\}$$

heet het *kubische Fermat-oppervlak*. Kubisch, omdat de gegeven vergelijking graad 3 heeft, en Fermat, omdat de vergelijking een beetje lijkt op de vergelijking $z_1^n + z_2^n + 1 = 0$. De beroemde ‘laatste stelling van Fermat’, bewezen door Andrew Wiles in 1995, kan worden geformuleerd als de uitspraak dat op deze *n*-de *graads Fermatkromme* voor $n \geq 2$ geen punten (z_1, z_2) liggen met beide coördinaten rationale getallen $\neq 0$. In het algemeen heet de door $z_1^n + z_2^n + \dots + z_{d+1}^n = 0$ gegeven verzameling een *Fermatvariëteit* van dimensie *d* en graad *n*.

Er liggen inderdaad 27 lijnen op *F*. Schrijf namelijk $\omega := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ en maak een verdeling $\{1, 2, 3\} = \{j\} \cup \{k, \ell\}$ waarbij $k < \ell$. Kies verder gehele getallen *m, n*. Dan definieert

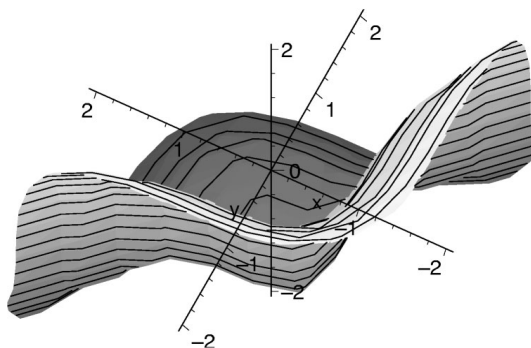
$$L_{j,m,n} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 ; z_j = -\omega^m \text{ en } z_k = -\omega^n z_\ell\}$$

een lijn. Omdat $1 + (-\omega^m)^3 = 0 = z^3 + (-\omega^n z)^3$ voor elke $z \in \mathbb{C}$ en alle gehele *n, m*, liggen deze lijnen op *F*. Verder geldt $\omega^3 = 1$ en dus $\omega^{n+3} = \omega^n$. Er volgt, dat we alle genoemde lijnen al krijgen door *j, n, m* uit $\{1, 2, 3\}$ te kiezen. Er zijn 27 mogelijkheden om dit te doen, en het is eenvoudig na te gaan dat alle zo verkregen lijnen verschillend zijn.

We hebben nu aangetoond, dat het kubische Fermat-oppervlak *F* ten minste 27 lijnen bevat. waarom er niet meer lijnen op *F* liggen komt later aan de orde. Precies 3 van deze lijnen zijn over de reële getallen gedefinieerd, namelijk de

$L_{j,m,n}$ met $m = n = 3$. Dit blijkt heel weinig te zijn (minder kan niet op een ‘glad kubisch oppervlak’), en daarom is een plaatje van de reële punten op het kubische Fermat-oppervlak niet erg spectaculair (ondanks het feit, dat het oppervlak heel veel symmetrie heeft: zo is met een punt $(a, b, c) \in F$ ook elke permutatie (a, c, b) en (b, c, a) enzovoort, weer een punt van F . En, mits de coördinaten niet nul zijn, ook $(1/a, b/a, c/a)$ enzovoort).

Opgave: Ga na dat door het samenstellen van bovengenoemde symmetrieën er in totaal 24 verschillende ontstaan. Op welke manier permuteren deze de 27 lijnen $L_{j,m,n}$?



Hier zijn de reële punten $(x, y, z) \in F$ getekend die bovendien voldoen aan $-2 < x, y, z < 2$.

Voorbeeld: een kwadratisch oppervlak

Om alvast iets van het verschil te zien tussen een derdegraads (= kubisch) oppervlak en een tweedegraads (= kwadratisch), kijken we nu naar

$$Q := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 ; z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + 1\}.$$

Het plaatje van de reële punten op Q is goed te begrijpen: het ‘horizontale’ vlak gegeven door $z_3 = c$ (voor vaste $c \in \mathbb{R}$) snijdt Q in een cirkel met middelpunt $(0, 0, c)$ en straal $\sqrt{c^2 + 1}$. Dus de reële figuur is op te vatten als allemaal op elkaar gestapelde cirkels; de kleinste met straal 1.

We zoeken nu (alle) lijnen in Q . Daartoe geven we een lijn als een verzameling punten $v + tw$, waarin t de complexe getallen doorloopt, $w \in \mathbb{C}^3$ met $w \neq 0$ een richtingsvector van de lijn is, en $v \in \mathbb{C}^3$ is een punt (‘steunvector’) op de lijn. Er zijn nu twee mogelijkheden.

Ten eerste kan de lijn in een vlak gegeven door $z_3 = c$ liggen. In dit geval geldt $v = (a, b, c)$ en $w = (d, e, 0)$. De hierdoor gegeven lijn ligt in Q wanneer bovendien geldt

$$(a + td)^2 + (b + te)^2 = c^2 + 1$$

voor elke $t \in \mathbb{C}$. Herschrijven we dit als een kwadratische vergelijking in t , dus als $At^2 + Bt + C = 0$, dan voldoet elke $t \in \mathbb{C}$ hieraan precies dan, als



$A = B = C = 0$. Dit geeft allereerst $d^2 + e^2 = 0$, dus $e = \pm d\sqrt{-1}$. Omdat we de richtingsvector zeker mogen herschalen, geeft dit de oplossingen $w = (1, \pm\sqrt{-1}, 0)$. De vergelijking $B = 0$ levert vervolgens $a = -be$, en $C = 0$ (hetgeen equivalent is met $v \in Q$) geeft $c = \pm\sqrt{-1}$. Omdat alle punten $(-be, b, c)$ met $c^2 = e^2 = -1$ vastgekozen, op dezelfde lijn met steunvector $(0, 0, c)$ en richting $(1, e, 0)$ liggen, hebben we zo in totaal vier lijnen gevonden:

$$(0, 0, \pm\sqrt{-1}) + t(1, \pm\sqrt{-1}, 0)$$

voor elk van de vier keuzes van de tekens.

Ten tweede kan een lijn in geen enkel vlak met vergelijking $z_3 = c$ liggen. In dit geval varieert de z_3 -coördinaat van een punt op de lijn, en dus is de richtingsvector te schrijven als $w = (c, d, 1)$ en kunnen we als steunvector een punt $v = (a, b, 0)$ kiezen. We willen opnieuw dat de lijn in Q ligt, en dat betekent

$$(a + ct)^2 + (b + dt)^2 = t^2 + 1$$

voor elke $t \in \mathbb{C}$. Zo komen we tot het stelsel

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1; \\ ac + bd &= 0; \\ c^2 + d^2 &= 1. \end{aligned}$$

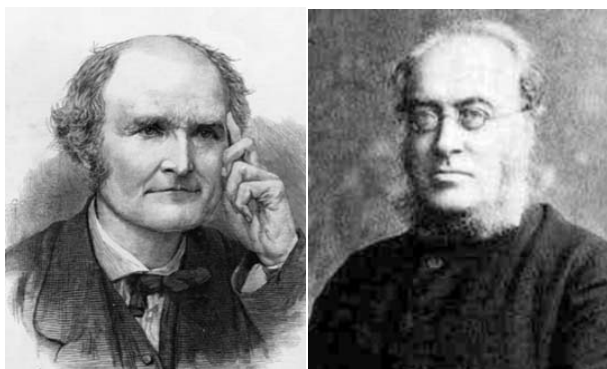
Voor elk punt $(a, b, 0) \in Q$ (dus met $a^2 + b^2 = 1$) krijgen we op deze wijze twee lijnen door dit punt die geheel in Q liggen, namelijk

$$(a, b, 0) + t(b, -a, \pm 1)$$

voor beide keuzes van het teken. Hiermee zijn alle lijnen in Q beschreven. In feite is met bovenstaande redenering in te zien, dat er door ieder punt van Q *precies twee* lijnen gaan die in Q liggen.

2. EINDIG VEEL EN MINSTENS ÉÉN

De verklaring van de in de vorige sectie gemaakte observatie, namelijk dat in een kwadratisch oppervlak oneindig veel, en in een kubisch oppervlak in het algemeen slechts eindig veel lijnen liggen, komt uit het midden van de 19de eeuw. In feite markeert dit soort werk het ontstaan van een geheel nieuw vakgebied binnen de wiskunde: de *algebraïsche meetkunde*. De Engelse wiskundige Arthur Cayley (1821–1895) schreef in 1849 aan zijn Ierse collega George Salmon (1819–1904), dat er op een kubisch oppervlak in het algemeen slechts eindig veel lijnen liggen. Salmon beaamde dit, en antwoordde dat het aantal precies 27 is.



Arthur Cayley en George Salmon

We zullen nu eerst wat preciezer aangeven wat we onder een *kubisch oppervlak* verstaan. Vervolgens schetsen we kort Cayleys argument, in een iets modernere opzet dan hij.

De in de voorgaande sectie gegeven voorbeelden lagen in \mathbb{C}^3 , de affine 3-dimensionale ruimte over de complexe getallen \mathbb{C} . De natuurlijke ambiance voor onze kubische, kwadratische en andere oppervlakken is evenwel $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, de *projectieve* 3-dimensionale ruimte \mathbb{C} . Ook in de hoofdstukken door Jan Aarts en door Hans Finkelnberg in dit boekje is een en ander over projectieve ruimten te vinden. Zoals wellicht bekend is, bestaat $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ uit alle $n + 1$ -tallen complexe getallen $z = (z_0, \dots, z_n) \neq (0, \dots, 0)$, waarbij we twee zulke $n + 1$ -tallen z, z' als hetzelfde opvatten precies dan, als $z' = az$ voor een complex getal a . Anders gezegd, de punten van $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ corresponderen met de lijnen door de oorsprong in \mathbb{C}^{n+1} . Op deze manier correspondeert een lijn in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ met een vlak door de oorsprong in \mathbb{C}^{n+1} .

Is $F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ een homogene veelterm van graad $d > 0$ (dat wil zeggen, $F \neq 0$ en elke term $az_0^{n_0}z_1^{n_1}z_2^{n_2}z_3^{n_3}$ die in F voorkomt, voldoet aan $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = d$), dan heet

$$S_F := \{v \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3; F(v) = 0\}$$

een *oppervlak van graad d in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$* . In het bijzonder is een kubisch oppervlak een oppervlak van graad 3 in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Omdat we eisen dat F homogeen is, geldt in het

bijzonder $F(av) = a^d F(v)$, en daarom is het ‘nul-zijn van F in een punt van $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ ’ welgedefinieerd.

Bij een punt $v \in S_F$ heet

$$T_v S_F := \left\{ (w_0, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 ; \sum_{j=0}^3 \frac{\partial F}{\partial z_j}(v) \cdot w_j = 0 \right\}$$

de raakruimte aan S_F in het punt v . Hiervoor zijn precies twee mogelijkheden:

- alle vier $\frac{\partial F}{\partial z_j}(v) = 0$. In dit geval is $T_v S_F = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, een 3-dimensionale raakruimte. Het punt v heet dan een singulier punt van S_F ;
- er is een $\frac{\partial F}{\partial z_j}(v) \neq 0$. Dan is $T_v S_F$ een vlak (oppervlak van graad 1) in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Het punt $v \in S_F$ heet nu een glad punt.

Als ieder punt van S_F glad is, dan noemen we S_F een glad oppervlak. Met dit begrip is het resultaat van Cayley en Salmon te formuleren:

Stelling (Cayley & Salmon, 1849) *Op ieder glad kubisch oppervlak in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ liggen precies 27 lijnen.*

Om een idee te krijgen waarom zo iets voor kubische oppervlakken zou kunnen gelden, maar niet voor bijvoorbeeld kwadratische of voor vierdegraads, redeneren we als volgt. Een homogeen polynoom van graad $d > 0$ is een lineaire combinatie van monomen $z_0^{n_0} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}$ met $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = d$. Het totale aantal van dit soort monomen noemen we $N_d + 1$.

Opgave: Hoe het hier gedefinieerde getal N_d precies afhangt van d is voor het argument onbelangrijk, maar levert wel een leuk combinatorisch probleem. Een standaardoplossing maakt gebruik van het volgende. Een monoom

$$z_0^{n_0} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}$$

van graad d kan je visualiseren als een rij van $d + 3$ balletjes waarvan er 3 zwart zijn en alle overige wit: Het aantal witte tot aan de eerste zwarte stelt de exponent van z_0 voor, het aantal witte tussen de eerste zwarte en de tweede zwarte de exponent van z_1 , enzovoort.

$$\circ \circ \circ \bullet \circ \circ \bullet \bullet \circ \quad \leftrightarrow \quad z_0^3 z_1^2 z_3$$

Hiermee wordt het tellen van het aantal monomen van graad d hetzelfde als het tellen van het aantal manieren om uit $d + 3$ ballen er 3 te kiezen. Tot welke formule voor N_d leidt dit? Ga na dat $N_2 = 9$ en $N_3 = 19$ en $N_4 = 34$. Wat is, meer algemeen, de formule voor het aantal monomen van graad d in n variabelen?

De oppervlakken van graad d in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ komen precies overeen met de punten in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d}$: oppervlak S_F geeft het punt met als coördinaten de coëfficiënten van F , en omgekeerd. Ook de lijnen in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ komen precies overeen met de punten van een zekere ruimte, namelijk met de punten van de Grassmannvariëteit $G(1, 3)$

waarover in dit boek het hoofdstuk van Hans Finkelnberg gaat. We schrijven (voor een oppervlak S van graad d in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ en voor een lijn $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$) dan ook $S \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d}$ en $\ell \in G(1, 3)$. Voor het onderstaande brengen we nog in herinnering, dat $G(1, 3)$ dimensie 4 heeft. Definieer nu

$$V_d := \left\{ (\ell, S) \in G(1, 3) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d} ; \ell \subset S \right\}.$$

Deze V_d is zelf, evenals $G(1, 3)$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d}$, een gesloten deel van een projectieve ruimte. In het bijzonder heeft V_d een dimensie, en die kan worden bepaald door de projectie

$$\pi_1 : V_d \longrightarrow G(1, 3) : (\ell, S) \mapsto \ell$$

te beschouwen. Deze projectie is ten eerste surjectief: immers, neem een lijn $\ell = \{sv + tw ; s, t \in \mathbb{C} \text{ niet beide nul}\}$. Er geldt $\ell \subset S_F$ precies dan, als $F(sv + tw)$ identiek nul is. Dit is een homogene uitdrukking in s, t van graad d , dus deze is nul wanneer alle $d + 1$ coëfficiënten van de monomen $s^k t^{d-k}$ nul zijn. Zo krijgen we $d + 1$ (lineaire) condities op de coëfficiënten van F . Omdat $N_d > d$ heeft dit zeker oplossingen.

Uit het voorgaande argument is verder te concluderen, dat het volledig origineel $\pi_1^{-1}(\ell)$ van $\ell \in G(1, 3)$ dimensie $N_d - d - 1$ heeft: we begonnen met $N_d + 1$ coëfficiënten, de $d + 1$ lineaire condities (die onafhankelijk van elkaar blijken te zijn) geven een oplossingsruimte van dimensie $N_d - d$, en omdat we projectief kijken levert dit voor $\pi_1^{-1}(\ell)$ dimensie $N_d - d - 1$.

De uit de lineaire algebra bekende formule die zegt, dat voor een lineaire afbeelding de dimensie van z'n kern plus de dimensie van het beeld samen de dimensie van de ruimte waarop de afbeelding werkt, is, heeft in de meetkunde een generalisatie die we nu toepassen op $\pi : V_d \rightarrow G(1, 3)$. Hiermee blijkt de dimensie van V_d gelijk te zijn aan $N_d - d - 1 + 4 = N_d - d + 3$.

Bekijk nu de andere projectie

$$\pi_2 : V_d \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d} : (\ell, S) \mapsto S.$$

We gaan gebruiken dan onder een 'gewone' afbeelding zoals π_2 , de dimensie van het beeld niet hoger kan zijn dan die van het origineel. Als geldt $d \geq 4$, dan is de dimensie van V_d strikt kleiner dan N_d . Dus ook het beeld $\pi(V_d) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d}$ heeft dimensie kleiner dan N_d . De 'meeste' punten $S \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_d}$ zitten derhalve niet in dat beeld; met andere woorden, voor die S is geen enkele ℓ te vinden zodat $(\ell, S) \in V_d$. Conclusie: een voldoende algemeen oppervlak van graad $d \geq 4$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ bevat geen enkele lijn.

Voor $d = 1$ en voor $d = 2$ is de dimensie van V_d juist groter dan N_d . Dit impliceert, dat voor een algemeen kwadratisch of eerstegraads oppervlak S het origineel $\pi_2^{-1}(S)$ een positieve dimensie heeft. Er zijn dus oneindig veel lijnen op zo'n oppervlak. In feite geldt, dat op *ieder* kwadratisch of eerstegraads oppervlak oneindig veel lijnen liggen.

Het resterende geval is $d = 3$, dus dat van kubische oppervlakken. In dit geval is π_2 een afbeelding tussen ruimten van gelijke dimensie. Nu geldt allereerst, dat het beeld $\pi_2(V_3)$ ook dimensie N_3 heeft. Immers, anders zou

voor elk kubisch oppervlak S moeten gelden dat ofwel $\pi^{-1}(S)$ leeg is (geen enkele lijn op S), ofwel $\pi^{-1}(S)$ heeft positieve dimensie (oneindig veel lijnen op S). En er bestaan kubische oppervlakken S waarvoor geen van beide juist is, zoals we in de volgende sectie zullen zien. Uit dit dimensieargument blijkt vervolgens, dat $\pi_2(V_3) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_3}$: immers, V_3 is een projectieve ruimte en daarom is het beeld $\pi_2(V_3)$ dit eveneens; de dimensie klopt, en dan blijkt er in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N_3}$ geen ruimte meer voor iets anders. Dit impliceert in het bijzonder, dat ieder kubisch oppervlak minstens één lijn bevat. Omdat π_2 een surjectieve afbeelding is tussen ruimten van gelijke dimensie, volgt tenslotte dat een voldoende algemeen kubisch oppervlak S een niet-lege *eindige* verzameling $\pi_2^{-1}(S)$ levert. Anders gezegd, op zo'n oppervlak ligt een niet-lege, eindige verzameling van lijnen.

3. PRECIES ZEVENENTWINTIG

De stap van 'minstens één' naar 'precies 27' gebruikt meetkunde van een iets andere soort; in het bijzonder is het daarbij van belang dat we ons kubisch oppervlak glad veronderstellen. Zo'n eis is in de redenering uit de vorige sectie nog van geen enkel belang.

We veronderstellen dus dat S een glad, kubisch oppervlak is, en $\ell \subset S$ is een lijn. Door eventueel over te gaan op nieuwe coördinaten voor $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, mogen we aannemen dat ℓ gegeven wordt door $z_0 = z_1 = 0$. De vergelijking voor S is dan te schrijven als

$$Az_2^2 + 2Bz_2z_3 + Cz_3^2 + 2Dz_2 + 2Ez_3 + F = 0,$$

waarin $A, \dots, F \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ homogeen zijn van graad respectievelijk 1, 1, 1, 2, 2, 3. In navolging van Salmon, zullen we nu eerst alle lijnen in S bepalen die liggen in een vlak door de lijn ℓ .

Zo'n vlak wordt gegeven door een vergelijking $sz_0 - tz_1 = 0$. De doorsnede met S bestaat dan uit de lijn ℓ samen met de door

$$A(t, s)z_2^2 + 2B(t, s)z_2z_3 + C(t, s)z_3^2 + 2D(t, s)z_jz_2 + 2E(t, s)z_jz_3 + F(t, s)z_j^2 = 0$$

(waarbij $j = 0$ als $s = 0$ en $j = 1$ anders) in het vlak $sz_0 = tz_1$ gegeven kegelsnede. Zo'n kegelsnede kan in het algemeen een gladde kegelsnede zijn, of een vereniging van twee lijnen, of een 'dubbele lijn'. Omdat S glad is, blijkt de laatste mogelijkheid niet voor te komen. Om dezelfde reden kan overigens bij de tweede mogelijkheid geen van beide lijnen gelijk zijn aan de vastgekozen lijn ℓ . Wij zijn op zoek naar lijnen in S , dus willen we in het bijzonder de punten $(t, s) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ vinden waarvoor de bovenstaande kegelsnede *niet* glad is. Dit is precies dan het geval, als de determinant

$$\det \begin{pmatrix} A(t, s) & B(t, s) & D(t, s) \\ B(t, s) & C(t, s) & E(t, s) \\ D(t, s) & E(t, s) & F(t, s) \end{pmatrix} = 0.$$

Deze determinant blijkt een homogeen polynoom van graad 5 in $\mathbb{C}[t, s]$ te zijn. Hij is dus te schrijven als $\prod_{j=1}^5 (\alpha_j t - \beta_j s)$. Alweer vanwege de gladheid van

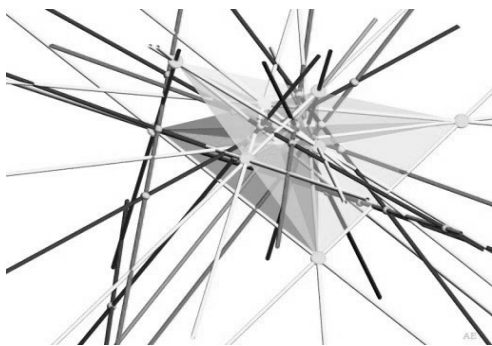
S zijn de $(\beta_j, \alpha_j) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ onderling verschillend. Zo vinden we precies 5 vlakken $\alpha_j z_0 = \beta_j z_1$ die S in ℓ en in nog 2 lijnen snijden.

Hiermee komen we als volgt aan het aantal 27. Begin met een vlak V dat S in 3 lijnen snijdt: $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 = V \cap S$. Behalve vlak V , vinden we dan nog precies 4 andere vlakken door ℓ_1 waarop nog twee lijnen in S liggen. Idem voor ℓ_2 en ℓ_3 , en zo vinden we

$$3 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 = 27$$

lijnen! We zijn op deze manier geen lijn in S vergeten, want zou er nog ergens een lijn zijn, dan snijdt deze het vlak V (hier wordt weer eens gebruikt dat we werken met $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ en niet met \mathbb{C}^3 : de laatstgenoemde ruimte kan een lijn evenwijdig lopen aan een vlak en deze dus nergens snijden. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ wordt een vlak door een homogene lineaire vergelijking in 4 variabelen, en een lijn door twee zulke vergelijkingen, beschreven. De doorsnee is dan niet leeg). Onze extra lijn heeft dus een punt met V gemeen, oftewel een punt met één van de lijnen ℓ_j . Maar dan is de lijn ofwel gelijk aan ℓ_j , ofwel het vlak opgespannen door deze lijn en ℓ_j is een vlak door ℓ_j dat S in precies 3 lijnen snijdt, en zulke lijnen hebben we al meegeteld.

Het hier geschetste klassieke bewijs van de stelling van Cayley en Salmon levert ook informatie over de ligging van de 27 lijnen. Bijvoorbeeld zien we, dat een gegeven lijn precies 10 van de andere snijdt, en dus disjunct van de overige 16 is. In eerste instantie lijkt de manier waarop de lijnen sommige wel, andere weer niet snijden vrij ingewikkeld, zoals het onderstaande plaatje (waarin alle 27 lijnen al over de reële getallen zichtbaar zijn) suggereert:⁴



Een klassieke beschrijving, afkomstig van de Zwitserse wiskundige Ludwig Schläfli (1814–1895), geeft evenwel heel kort weer welke lijnen elkaar precies snijden.

Stelling (Schläfli, 1858) *De 27 lijnen op een glad, kubisch oppervlak zijn te nummeren als $a_{i,j}$ (met $i \in \{1, 2\}$ en $1 \leq j \leq 6$) en $c_{m,n}$ (met $1 \leq n < m \leq 6$).*

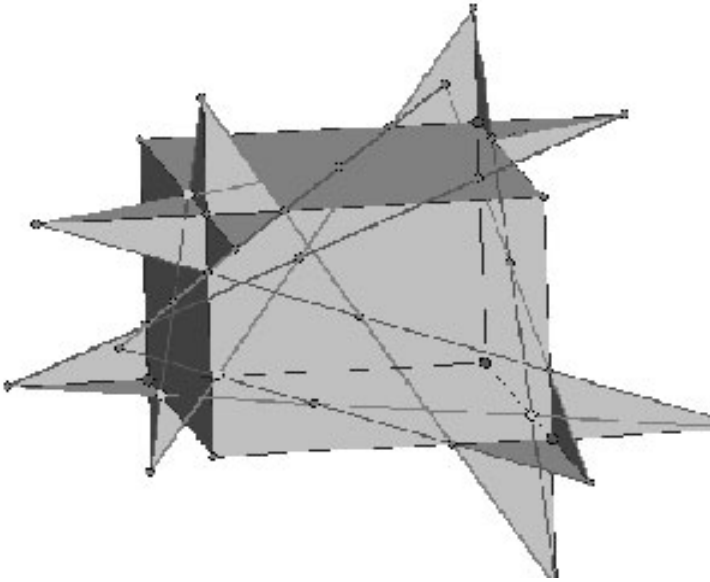
⁴ Zie pagina 72 voor een kleurenillustratie.

Daarbij snijdt $c_{n,m}$ de lijnen $a_{i,n}, a_{i,m}$ en elke $c_{i,j}$ met $i, j \notin \{n, m\}$. Voor de $a_{i,j}$ geldt, dat twee verschillende elkaar snijden precies dan, als beide indices verschillen.

Schläfli gebruikte hierbij de notatie

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \end{pmatrix}.$$

Twee verschillende hier gegeven lijnen snijden elkaar precies dan, als ze niet in dezelfde rij en evenmin in dezelfde kolom staan. Een dergelijke configuratie van 12 lijnen wordt een *Schläfli double-six* genoemd. In onderstaand figuur is een double-six configuratie te zien, waarbij op elk zijvlak van een balk 2 van de lijnen te vinden zijn.



In termen van de hierboven beschreven manier van Salmon om de 27 lijnen op te sommen, is zo'n double-six te vinden door te nemen $a_1 := \ell$, en b_1 kiezen we willekeurig uit de 16 lijnen op S die a_1 niet snijden. Voor een vlak dat S snijdt in a_1 en in nog twee andere lijnen geldt dan, dat b_1 dit vlak snijdt in een punt van precies één van die andere twee lijnen. Deze andere lijn noemen we a_2 (en de derde lijn $c_{1,2}$). Er zijn in totaal 5 zulke vlakken, dus zo verdergaand krijgen we ook a_3, a_4, a_5, a_6 en $c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}$. Op dezelfde manier kunnen we beginnen met de vlakken door b_1 en zo lijnen a_2, \dots, a_6 vinden die a_1 niet snijden. Het is niet moeilijk om na te gaan, dat zo een configuratie als gevraagd werd, wordt gekregen.

Opgave: Laat met behulp van een 'double-six' zien, dat er precies 45 vlakken V zijn met de eigenschap, dat de doorsnede $V \cap S$ uit drie lijnen bestaat.

Namelijk: 15 met als doorsnede $a_{1,m} \cup a_{2,n} \cup c_{m,n}$ en 30 met als doorsnede $c_{i,j} \cup c_{k,l} \cup c_{m,n}$.

4. CLEBSCH EN KLEIN EN DÜSSELDORF

Vrijwel vanaf de allereerste resultaten van Cayley en Salmon was er belangstelling voor het vervaardigen van modellen van kubische oppervlakken. Zo beschrijft in 1869 de Engelse wiskundige James Joseph Sylvester (1814–1897) heel enthousiast een voor een stereoscoop door de Duitse wiskundige Ludwig Christian Wiener (1826–1896) gemaakte tekening van de 27 lijnen. Deze Wiener had ook al de aandacht van z'n landgenoot Felix Klein (1849–1925) getrokken: op de eerste bladzijden van Deel 2 van het verzameld werk van Klein is te lezen, dat Klein rond Pinksteren 1868 een door Wiener vervaardigd model van een kubisch oppervlak met 27 reële lijnen erop zag, en dat dit een belangrijke impuls leverde voor Kleins latere werk aan modellen van algebraïsche oppervlakken.

De geschiedenis van dit soort modellen verdient overigens apart aandacht, niet alleen beperkt tot het speciale geval van kubische oppervlakken dat we hier beschouwen. We gaan hier niet dieper op in, maar merken slechts op dat de aandacht voor deze modellen verder ging dan alleen vanuit de wiskunde. Zo bezit het Palais de la Découverte in Parijs een model van een kubisch oppervlak. Klein bracht in 1893 een door zijn medewerker Walter von Dyck (1856–1934) samengestelde tentoonstelling van 'Duitse wiskundige modellen' naar de wereldtentoonstelling in Chicago.

Het modellen-maken is in Duitsland wel een beetje een familieaangelegenheid geworden. Nadat Klein, met wat invloed van Christian Wiener, samen met collega Rudolf Clebsch (1833–1872) ging nadenken over het maken van



Rudolf Clebsch en Felix Klein

een model van een kubisch oppervlak met 27 reële lijnen erop, lieten ze dit in gips vervaardigen door student Adolf Weiler. In augustus 1872 tonen Clebsch en Klein aan het *Koninklijk Gezelschap der Wetenschappen in Göttingen* het resultaat plus een model van alleen de 27 lijnen. Drie maanden later overlijdt Clebsch ten gevolge van difterie.

Een oomzegger van Christian Wiener, Ludwig Brill, gaat dan op commerciële basis modellen maken. Beroemd is daarbij de Rodenberg-serie, bestaande uit 27 gipsmodellen van kubische oppervlakken, ontworpen door Kleins

student Carl Rodenberg (1856–1934). Brills broer Alexander was wiskundige, student van Clebsch, en samen met Klein erg geïnteresseerd in het (laten) maken van modellen. Het bedrijf van Ludwich Brill kwam rond 1900 in handen van Martin Schilling. Diens naam staat op veel van de gipsmodellen die nog steeds in de meeste wiskundeafdelingen van Europese universiteiten te vinden zijn. Of hij familie was van de wiskundige Carl Schilling, die in 1880 in Göttingen promoveerde op het maken van stereoscoop-plaatjes van oppervlakken, weet ik niet.

De bekendste van alle kubische oppervlakken is waarschijnlijk het zogeheten *diagonaaloppervlak van Clebsch*. Clebsch was in 1861 de eerste die een bewijs publiceerde van de volgende bewering: elk kubisch, homogeen polynoom $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ is te schrijven als $f = g_0^3 + \dots + g_4^3$, voor zekere eerstegraads homogene $g_j \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$. Al 10 jaar eerder had ook Sylvester dit gezegd, maar zonder bewijs. Met een dimensieargument is overigens vrij eenvoudig in te zien, waarom er 5 eerstegraads veeltermen nodig zijn: de afbeelding die aan de coëfficiënten van N eerstegraads veeltermen de coëfficiënten van de som van hun derde machten toevoegt, is op te vatten als een afbeelding $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{4N-1} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{19}$. Het beeld heeft dus dimensie $\leq \min\{19, 4N - 1\}$. Dus voor $N \leq 4$ kan deze afbeelding niet surjectief zijn. Om in te zien dat voor $N = 5$ de afbeelding wel surjectief is, is het voldoende om een punt in het beeld aan te wijzen dat slechts eindig veel originelen heeft. Dit blijkt mogelijk te zijn.

Uit het genoemde resultaat volgt, dat elk kubisch oppervlak te beschrijven is in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ door twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 &= 0; \\ a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Hierin zijn niet alle a_j gelijk aan 0.

Opgave: Ga na dat als in bovenstaande beschrijving voor minstens twee indices j geldt $a_j = 0$, dan is het oppervlak singulier (een punt op het oppervlak met coördinaat $y_j = 0$ voor twee j met $a_j = 0$ is singulier).

Om een glad oppervlak te krijgen, mag dus voor maximaal één j gelden $a_j = 0$. In de volgende sectie staat een voorbeeld waarbij $a_j \neq 0$ voor elke j , maar toch is het oppervlak singulier.

Stel nu, we hebben een glad, kubisch oppervlak, en $a_0 = a_1 \neq 0$. We mogen dan aannemen $a_0 = a_1 = 1$. De doorsnede van ons kubisch oppervlak met het vlak gegeven door $y_0 + y_1 = 0$ hoort dan bij het stelsel

$$\begin{aligned} y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 &= 0; \\ a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 &= 0. \end{aligned}$$

We mogen hierna eventueel verwisselen van y_2, y_3, y_4 en ook $a_4 = -1$. Dit levert $y_4 = a_2 y_2 + a_3 y_3$, en $y_2^3 + y_3^3 + (a_2 y_2 + a_3 y_3)^3 = 0$. Die laatste vergelijking is te herschrijven als $(\alpha_1 y_2 - \beta_1 y_3)(\alpha_2 y_2 - \beta_2 y_3)(\alpha_3 y_2 - \beta_3 y_3) = 0$ voor zekere

$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$. De conclusie hieruit is, dat de gevraagde doorsnede uit 3 lijnen bestaat, namelijk

$$y_0 + y_1 = a_2 y_2 + a + 3y_3 - y_4 = \alpha_j y_2 - \beta_j y_3 = 0,$$

voor $j = 1, 2, 3$. Deze drie lijnen gaan door één punt, namelijk door $(1, -1, 0, 0, 0)$. Zo'n punt met de eigenschap, dat het op drie lijnen van het kubische oppervlak ligt, heet een *Eckardt-punt*. Dit begrip heet naar de Duitse wiskundeleraar F.E. Eckardt uit Chemnitz; na diens dood publiceerde in 1875 het tijdschrift *Mathematische Annalen* diens werk over zulke punten. Hij zal overigens ergens tussen 1871 en 1875 zijn overleden, want in zijn lange artikel noemt hij het werk van Clebsch uit 1871.

Uit het bovenstaande volgt, dat ieder paar $m \neq n$ met $a_m = a_n$ aanleiding geeft tot een Eckardt-punt. Zo krijgen we er maximaal $\binom{5}{2} = 10$, en precies 10 als $a_0 = \dots = a_4$. Overigens staat in het in 1942 verschenen boek (p. 152) van de Italiaanse wiskundige Beniamino Segre (1903–1977), dat het aantal Eckardt-punten op een glad, kubisch oppervlak alleen de waarden $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 18\}$ kan hebben. Segre bewijst verder, dat er op isomorfie na slechts één oppervlak met 18 Eckardt-punten bestaat, namelijk het kubische Fermat-oppervlak. En eveneens, dat er op isomorfie na slechts één glad, kubisch oppervlak is met precies 10 Eckardt-punten. Dit is het hieronder behandelde oppervlak.

Opgave: Laat zien dat het kubische Fermat-oppervlak F ; $z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0$ inderdaad 18 Eckardt-punten heeft, namelijk alle punten met twee van de coördinaten gelijk aan nul.

Het diagonaaloppervlak van Clebsch, waarover Clebsch in 1871 voor het eerst publiceerde en waarvan hij een jaar later samen met Klein een model liet maken, betreft het geval dat al deze a_j gelijk zijn. Dit is dus het oppervlak (zie figuren op pagina 49)

$$\mathfrak{C} : \begin{aligned} y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 &= 0; \\ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0. \end{aligned}$$

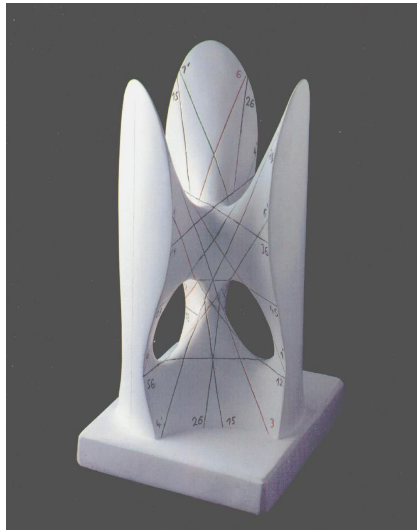
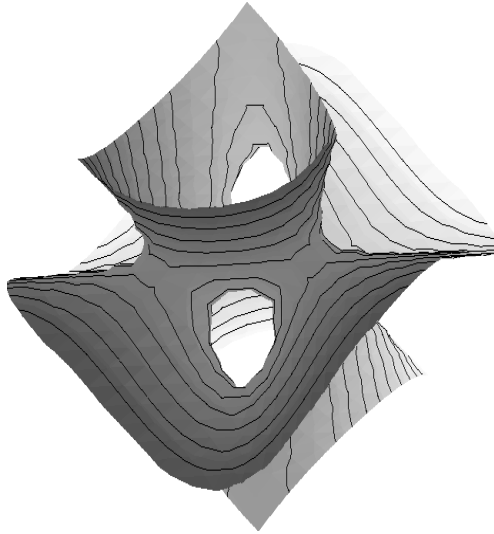
Opgave: Laat zien dat het diagonaaloppervlak van Clebsch de volgende eigenschappen heeft.

1. De 5 vlakken $y_j = 0$ bevatten ieder 3 lijnen.
2. Schrijf $\tau := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (de 'gouden snede'). Maak een verdeling $\{j, k, m, n\} = \{1, 2, 3, 4\}$ waarbij $j < k$. Dan is

$$\Delta_{(j,k,m,n)} : y_j - \tau y_k + y_m = y_k + y_n - \tau y_j = \tau y_j + \tau y_k - y_0 = 0$$

een lijn in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$.

3. Schrijf $\zeta := e^{2\pi i/5} = \cos(2\pi/5) + \sin(2\pi/5)\sqrt{-1}$. Dan is $y_0 = 1, y_j = \zeta^2, y_k = \zeta^3, y_m = \zeta^4, y_n = \zeta$ een punt op \mathfrak{C} en ook op $\Delta_{(j,k,m,n)}$. Datzelfde geldt voor het punt dat je krijgt door alle coördinaten hier te vervangen door hun complex geconjugeerde.



4. De 15 lijnen uit (1) samen met de 12 lijnen uit (2) vormen de 27 lijnen op \mathfrak{C} . In het bijzonder zijn dus al deze lijnen reëel.
5. De 12 lijnen uit (3) vormen een double-six, als volgt:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \Delta_{(1,2,3,4)} & \Delta_{(1,3,4,2)} & \Delta_{(1,4,2,3)} & \Delta_{(2,3,1,4)} & \Delta_{(2,4,3,1)} & \Delta_{(3,4,1,2)} \\ \Delta_{(1,2,4,3)} & \Delta_{(1,3,2,4)} & \Delta_{(1,4,3,2)} & \Delta_{(2,3,4,1)} & \Delta_{(2,4,1,3)} & \Delta_{(3,4,2,1)} \end{array} \right).$$

(In de bovenste rij staan 6 indices waarbij

$$1 \mapsto j, 2 \mapsto k, 3 \mapsto m, 4 \mapsto n$$

een even permutatie is; in de onderste gaat het om oneven permutaties.)

Om een figuur van de reële punten op \mathcal{C} te maken, substitueren we eerst $y_4 = -(y_0 + y_1 + y_2 + y_3)$. dat levert een vergelijking

$$y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - (y_0 + y_1 + y_2 + y_3)^3 = 0.$$

In navolging van Klein, Clebsch en anderen maken we hier vervolgens een oppervlak in \mathbb{C}^3 in plaats van in \mathbb{P}^3 van, door te stellen $y_3 = a(1 - y_0 - y_1 - y_2)$ voor een vaste $a > 1$. Als we punten in \mathbb{P}^3 opvatten als lijnen door de oorsprong in \mathbb{C}^4 , dan betekent dit, dat we van elk zo'n lijn alleen het punt op het hypervlak $a(y_0 + y_1 + y_2) + y_3 = a$ nemen. Het vlak $a(y_0 + y_1 + y_2) + y_3 = 0$ levert dan 'punten op oneindig', die we in ons plaatje niet zien.

In 1999, precies 150 jaar na de publicatie van de stelling van Cayley en Salmon en ook 150 jaar na de geboorte van Felix Klein, werd in Kleins geboortestad Düsseldorf voor het cafetaria van de Heinrich-Heine universiteit een $2\frac{1}{2}$ meter hoog beeld van het diagonaaloppervlak van Clebsch geplaatst.⁵



5. CAYLEY EN VAN DER BLIJ

Veel van de gipsmodellen horen bij singuliere kubische oppervlakken. In het geval dat een kubisch oppervlak slechts eindig veel singuliere punten heeft, is het argument van Cayley en Salmon nog steeds te gebruiken. Alleen is het dan mogelijk, dat er minder dan 5 vlakken door een gegeven lijn op z'n oppervlak gaan, met de eigenschap dat ze het oppervlak in een vereniging van drie lijnen snijden. We behandelen hier twee voorbeelden.

Het *Cayley kubische oppervlak* wordt gegeven door de vergelijking

$$z_0z_1z_2 + z_0z_1z_3 + z_0z_2z_3 + z_1z_2z_3 = 0.$$

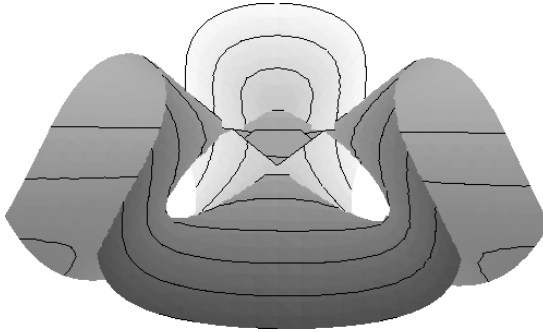
⁵ Zie pagina 72 voor een kleurenillustratie.

Het is eenvoudig na te rekenen, dat dit oppervlak 4 singuliere punten heeft, namelijk de punten met drie coördinaten gelijk aan 0. De substituties $y_4 := -(y_0 + y_1 + y_2 + y_3)$ en $z_j = 2y_j + y_4$ (voor $j = 1, 2, 3, 4$) leveren de vergelijkingen

$$\begin{aligned} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0; \\ y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + \frac{1}{4}y_4^3 &= 0. \end{aligned}$$

Opgave: Samen met de vergelijking $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ leveren $y_j + y_k = 0$ (voor $0 \leq j < k \leq 3$) nog 6 vlakken, $2y_j + y_4 = 0$ nog 4 vlakken, en $y_4 = 0$ een vlak. Deze 11 vlakken snijden het oppervlak elk in 3 lijnen. In totaal levert dit 9 lijnen, en dat zijn alle lijnen op het Cayley kubische oppervlak.

Een plaatje gekregen door in de oorspronkelijke vergelijking z_3 te elimineren middels $3(z_0 + z_1 + z_2 + 2z_3) = 1$ ziet er als volgt uit.



Het volgende voorbeeld illustreert dat niet alle kubische oppervlakken uitsluitend in de 19de eeuw werden bestudeerd. Er bestaan oneindig veel onderling niet gelijkvormige driehoeken ABC met de eigenschap, dat de zijden AB , AC en BC een rationaal getal als lengte hebben, en bovendien gaan de deellijn uit

punt A , de zwaartelijn uit punt B , en de hoogtelijn uit punt C door één punt. Dit volgt uit het (niet geheel evidente) feit, dat de oplossingen in rationale getallen (x, y) van de vergelijking

$$y^2 = x^3 - 4x + 4$$

dicht liggen in de verzameling van alle reële oplossingen. Bij het zoeken naar zulke oplossingen kwam de emeritus hoogleraar wiskunde F. van der Blij in het jaar 2004 op het idee, de '4' in deze vergelijking te vervangen door een t^2 . Dat levert een vergelijking $y^2 = x^3 - t^2x + t^2$, en oplossingen $x = f(t), y = g(t)$ leveren door substitutie $t = \pm 2$ oplossingen voor het oorspronkelijke probleem. Om zulke oplossingen te vinden, maken we eerst de vergelijking homogeen:

$$y^2z = x^3 - t^2x + t^2z.$$

Dit definieert een kubisch oppervlak in \mathbb{P}_C^3 , dat we als \mathfrak{B} zullen noteren.

Opgave:

1. Het oppervlak \mathfrak{B} bevat precies één singulier punt, namelijk $(x, y, z, t) = (0, 0, 1, 0)$.
2. Het vlak $V : x = 0$ snijdt \mathfrak{B} in drie lijnen, namelijk $\ell_1 : x = z = 0$ en $\ell_2 : x = y - t = 0$ en $\ell_3 : x = y + t = 0$.
3. De vlakken door ℓ_1 zijn V , en alle vlakken $z + \alpha x = 0$. Deze snijden \mathfrak{B} in drie lijnen precies dan, als $\alpha \in \{0, -1\}$. Het vlak $z = 0$ levert als nieuwe lijnen $\ell_4 : z = x + t = 0$ en $\ell_5 : z = x - t = 0$. Merk op dat de 3 lijnen in dit vlak door $(0, 1, 0, 0)$ gaan; dit is dus een Eckardt-punt. Het vlak $z - x = 0$ levert $\ell_6 : z - x = z - y = 0$ en $\ell_7 : z - x = z + y = 0$. De 3 lijnen door dit vlak bevatten het Eckardt-punt $(0, 0, 0, 1)$.
4. De vlakken door ℓ_2 zijn V en alle $y - t + \alpha x = 0$. Zo'n vlak snijdt \mathfrak{B} in 3 lijnen precies dan, als $\alpha \in \{0, 2, -2\}$.

Voor $\alpha = 0$ levert dat de lijnen $\ell_8 : y - t = x + t = 0$ en $\ell_9 : y - t = x - t = 0$. Voor $\alpha = 2$ vinden we $\ell_{10} : y - t + 2x = x - t = 0$ en $\ell_{11} : y - t + 2x = x + t - 4z = 0$. Het resterende geval $\alpha = -2$ geeft $\ell_{12} : y - t - 2x = x + t = 0$ en $\ell_{13} : y - t - 2x = t - x + 4z = 0$.

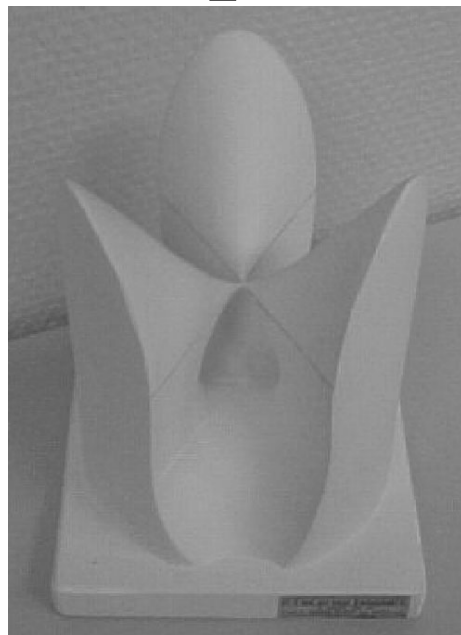
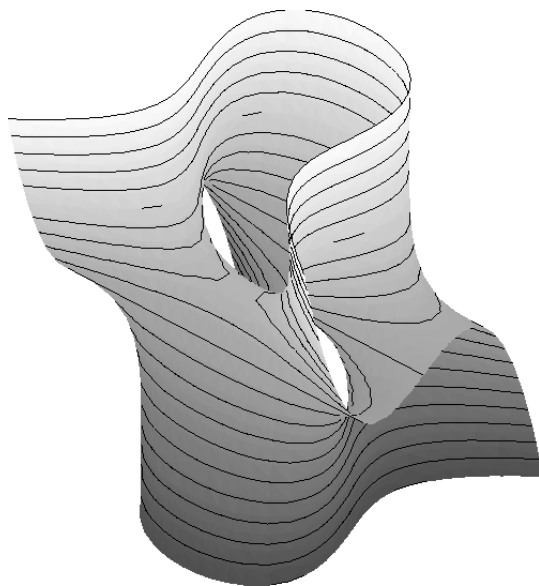
5. De vlakken door ℓ_3 krijg je, door overal in de berekening in (4) de t te vervangen door $-t$. Dat levert slechts twee lijnen die we nog niet hadden: $\ell_{14} : y + t + 2x = x - t - 4z = 0$ en $\ell_{15} : y + t - 2x = -t - x + 4z = 0$.

Het oppervlak \mathfrak{B} bevat dus in totaal 15 lijnen.

6. De lijnen met $z = 0$, dus ℓ_1, ℓ_4 en ℓ_5 leveren geen oplossingen $(x, y) = (f(t), g(t))$ van de vergelijking $y^2 = x^3 - t^2x + t^2$. Alle overige wel, namelijk

$$\begin{array}{ll} \ell_2, \ell_3 & (0, \pm t) \\ \ell_6, \ell_7 & (1, \pm 1) \\ \ell_8, \ell_{12} & (-t, \pm t) \\ \ell_9, \ell_{10} & (t, \pm t) \\ \ell_{11}, \ell_{15} & (-t + 4, \pm(3t - 8)) \\ \ell_{13}, \ell_{14} & (t + 4, \pm(3t + 8)) \end{array}.$$

Een plaatje bij \mathfrak{B} wordt bijvoorbeeld gekregen door $t = 1$ te substitueren, dus door te kijken naar het vlak met vergelijking $y^2 z = x^3 - x + z$.



Een plaatje bij \mathfrak{B}

In 1911 schreef de Noord-Amerikaanse wiskundige Archibald Henderson (1877–1963) zijn boek *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*. De

in deze sectie behandelde voorbeelden staan daar in § 39 en § 26. Achter in het boek zit een collectie uitvouwbare platen, waarop de configuraties van alle lijnen op deze en op nog 19 andere kubische oppervlakken te zien zijn.

6. ZES PUNTEN IN HET VLAK

De moderne manier om een kubisch oppervlak te beschouwen, is dit oppervlak zien als het vlak $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ waarin 6 punten zijn vervangen door 6 lijnen (in feite, door alle mogelijke richtingen door zo'n punt). Dit heet in de meetkunde het 'opblazen van het vlak in 6 punten'. Eigenlijk is ook deze visie al in het klassieke werk van Clebsch terug te vinden. We geven summier het idee.

Begin met $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, zeg met projectieve coördinaten x_0, x_1, x_2 . Neem 6 punten $p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, en beschouw de verzameling derdegraads homogene polynomen $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ die voldoen aan $f(p_j) = 0$ voor elke j . Als geen enkel drietal van de 6 punten op één lijn ligt, en evenmin liggen ze alle 6 op een kegelsnede (= kwadratische kromme), dan is deze verzameling polynomen een vectorruimte over \mathbb{C} van dimensie 4. Kies in dit geval een basis f_0, f_1, f_2, f_3 . We maken hiermee een afbeelding

$$\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \cdots \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$$

met als voorschrift $\varphi(x) := (f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x))$. Deze afbeelding is niet overal gedefinieerd: in de punten p_j geldt per definitie dat $f_k(p_j) = 0$ voor elke k , dus daar levert het voorschrift geen punt in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ op. Maar nemen we een lijn door p_j , zeg $p_j + tv$ voor zekere richting v , dan geldt $f_k(p_j + tv) = tf'_k(p_j) \cdot v + \dots$, dus alle coördinaten zijn veelvouden van t , en de inproducten $f'_k(p_j) \cdot v$ kunnen niet alle nul zijn voor vaste $v \neq 0$ en j . Conclusie: als we p_j vervangen door de verzameling richtingen door p_j , dan is op de resulterende ruimte de afbeelding φ wel overal goed gedefinieerd (en iets nauwkeuriger kijken naar dit argument levert zelfs, dat het beeld van die verzameling richtingen door p_j een lijn in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ is).

Er blijkt nu, dat het beeld van φ een kubisch oppervlak in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ is. Om dit een beetje aannemelijk te maken, stel dat twee 'algemeen gekozen' punten a, b hetzelfde beeld zouden hebben. Na eventueel de basis $\{f_k\}$ door een andere te hebben vervangen, mogen we aannemen dat hun beeldpunt $(0, 0, 0, 1)$ is. Dit impliceert, dat f_0, f_1, f_2 in de ruimte van veeltermen die niet alleen in alle p_j maar ook in a en in b nul zijn. Die ruimte heeft dimensie 2, maar de f_k zijn onafhankelijk. Er volgt dat φ in 'de meeste' punten injectief is. Het beeld van φ is daarom een oppervlak. Dit heeft graad 3 omdat de doorsnede met een algemeen gekozen lijn uit 3 punten bestaat. Immers, wordt die lijn gegeven door $\sum a_j z_j = 0 = \sum b_j z_j$, dan zoeken we naar de oplossingen van $\sum a_j f_j = 0 = \sum b_j f_j$. Anders gezegd, het gaat om de verzameling snijpunten van twee kubische krommen. Die snijden in 9 punten. Het zestal p_1, \dots, p_6 telt niet mee, en zo vinden we dat het beeld inderdaad een kubisch oppervlak is.

Omgekeerd is ieder (glad) kubisch oppervlak als beeld van zo'n afbeelding φ te realiseren. Meetkundig is dat in te zien door het proces van het opblazen weer ongedaan te maken. Begin met de bovenste rij lijnen in een double-six (dus 6

onderling disjuncte lijnen), en ‘blaas deze neer’, dat wil zeggen, vervang elk van de lijnen door een punt. Het probleem is dan, in te zien dat het resulterende oppervlak inderdaad gewoon $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ is. Dit is niet-triviaal. Bijvoorbeeld is eenzelfde uitspraak over de reële getallen onjuist: er bestaan kubische oppervlakken over \mathbb{R} die niet te krijgen zijn als beeld van een reële φ als boven, zelfs niet als we onder de punten p_j paren p, \bar{p} van onderling complex geconjugeerde paren toelaten. Wel lukt het indien er meer dan drie reële lijnen op het oppervlak bestaan.

Met de gegeven beschrijving zijn ook de 27 lijnen weer te vinden. We hebben er al 6, namelijk de beelden van de richtingen door de punten p_j . Noem deze lijnen ℓ_j . Ook het beeld van een verbindingslijn door twee punten p_j, p_k is een lijn: geef die verbindingslijn door $\ell = 0$. In de ruimte opgespannen door $x_0^2\ell, x_0x_1\ell, x_0x_2\ell, x_1^2\ell, x_1x_2\ell, x_2^2\ell$ vinden we dan 2 lineair onafhankelijke veeltermen $q_1\ell, q_2\ell$ die bovendien verdwijnen in de overige 4 punten p_m . Dit aanvullen levert een basis $q_1\ell, q_2\ell, f_2, f_3$ van de gezochte ruimte van veeltermen, en dus een afbeelding φ bij deze basis die de gegeven lijn afbeeldt op $z_0 = z_1 = 0$. De zo verkregen lijnen noteren we als $\ell_{\{j,k\}}$ (met $j \neq k$).

Eenzelfde soort argument laat zien, dat elke kegelsnede door 5 van de punten p_j een lijn als beeld heeft. Immers, geef zo’n kegelsnede als $q = 0$. In de ruimte opgespannen door x_0q, x_1q, x_2q zijn dan 2 onafhankelijke veeltermen m_1q, m_2q te vinden die ook in het resterende punt p_k verdwijnen. Na aanvullen ontstaat een basis m_1q, m_2q, f_2, f_3 voor de gezochte ruimte van veeltermen. Het is duidelijk dat de gegeven kegelsnede onder de bijbehorende φ wordt afgebeeld op $z_0 = z_1 = 0$. Een zo verkregen lijn noteren we als ℓ'_k (met k de index van het punt *niet* op de kegelsnede).

In totaal hebben we zo $6 + \binom{6}{2} + 6 = 27$ lijnen. Ze snijden onderling als volgt. ℓ_j snijdt elke $\ell_{\{j,k\}}$ en elke ℓ'_k met $k \neq j$. Evenzo snijdt ℓ'_j elke $\ell_{\{j,k\}}$ en elke ℓ_k met $k \neq j$. En $\ell_{\{j,k\}}$ snijdt $\ell_j, \ell_k, \ell'_j, \ell'_k$ en elke $\ell\{m, n\}$ met $\{m, n\} \cap \{j, k\} = \emptyset$. In het bijzonder is

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ \ell'_1 & \ell'_2 & \ell'_3 & \ell'_4 & \ell'_5 & \ell'_6 \end{pmatrix}$$

een double-six.

Met behulp van deze manier om kubische oppervlakken te bekijken, gaan we nu iets zeggen over de mogelijkheden voor het aantal reële lijnen op een glad, over \mathbb{R} gedefinieerd oppervlak. Merk allereerst op, dat dit aantal oneven is: de niet over \mathbb{R} gedefinieerde lijnen komen namelijk in onderling complex geconjugeerde paren. En 27 min een even getal is een oneven getal. We beperken ons nu tot reële oppervlakken die verkregen zijn door in de reële \mathbb{P}^2 zes punten op te blazen. Volgens een resultaat dat de Italiaanse wiskundige Beniamino Segre (1903–1977) in zijn boek (1942) over gladde kubische oppervlakken bewijst, heeft ieder ander glad, reëel kubisch oppervlak precies 3 reële lijnen.

Om de afbeelding φ over \mathbb{R} te kunnen definiëren, is het noodzakelijk en voldoende dat als p_j een punt is waarin de derdegraads veeltermen f nul moeten zijn, dan verdwijnen deze ook in het punt \bar{p}_j verkregen door alle coördinaten

van p_j complex te conjugereren. We eisen daarom, dat de verzameling $\{p_j\}$ gesloten is onder complexe conjugatie. Er zijn dan $a = 6, 4, 2$ of 0 reële punten p_j en $(6 - a)/2$ paren onderling geconjugeerde punten. We gaan hiervoor de verschillende mogelijkheden langs.

Zijn alle 6 punten reëel ($a = 6$), dan ook alle ℓ_j, ℓ'_k en $\ell_{\{j,k\}}$. In dit geval zijn alle 27 lijnen dus reëel.

Zijn 4 van de punten reëel ($a = 4$), dan zijn alleen de ℓ_j, ℓ'_k bij deze 4 punten reëel, en verder de $\ell_{\{j,k\}}$ waarbij j, k ofwel beide, ofwel geen van beide bij dit viertal horen. In totaal levert dit $4 + 4 + \binom{4}{2} + 1 = 15$ reële lijnen.

Hetzelfde argument geeft voor 2 reële punten ($a = 2$) in totaal $2 + 2 + 1 + 2 = 7$ reële lijnen, want we moeten $\{j, k\}$ zó kiezen dat ofwel beide bijbehorende punten reëel zijn, ofwel ze zijn onderling geconjugeerd.

In het resterende geval $a = 0$ leveren alleen de paren $\{j, k\}$ bij onderling geconjugeerde p_j, p_k een reële lijn, dus er zijn er slechts 3.

Op de webpagina www.cubicsurface.net is, naast een prachtige verzameling plaatjes van kubische oppervlakken, een programma te vinden waarin je zelf de 6 punten kan bewegen en dan kan zien welke gevolgen dit heeft voor het bijbehorende kubische oppervlak.

7. EEN CODERINGSTHEORIE TOEPASSING

Een wellicht wat onverwachte moderne toepassing van het diagonaaloppervlak van Clebsch komt uit de theorie van de fouten-verbeterende codes. Ruwgezegd bestaat een code uit een aantal rijtjes nullen en enen. Met behulp van de theorie van kubische krommen kan voor een bepaald type codes worden bepaald, hoeveel rijtjes er in de code zijn bestaande uit precies 5 enen en verder allemaal nullen.

De codes waar het hier om gaat, heten BCH-codes, naar de ingenieurs Bose, Ray-Chaudhuri en Hocquenghem. Er is wat theorie over eindige lichamen nodig om deze te definiëren. Een eindig lichaam met $q > 1$ elementen is een verzameling \mathbb{F}_q bestaande uit precies q elementen, waarin kan worden opgeteld en vermenigvuldigd. Dit voldoet aan de gebruikelijke regels (associativiteit, commutativiteit, distributiviteit). Er zijn speciale elementen $0 \neq 1 \in \mathbb{F}_q$ zodat $a + 0 = a$ en $a \cdot 1 = a$ voor elke $a \in \mathbb{F}_q$. En elke $a \neq 0$ heeft een inverse: een b met $a \cdot b = 1$. Is q een macht van een priemgetal, dan blijkt er in essentie slechts één eindig lichaam \mathbb{F}_q te bestaan. En de elementen $\neq 0$ daarin zijn te schrijven als $a, a^2, a^3, \dots, a^{q-1} = 1$ voor zekere $a \in \mathbb{F}_q$.

In het speciale geval $q = 2^m$ kiezen we zo'n a , en we definiëren dan

$$\text{BCH}(q) := \left\{ (b_1, \dots, b_{q-1}) ; \sum b_j a^j = 0 = \sum b_j a^{3j} \right\}.$$

Hierin nemen we alle $b_j \in \{0, 1\}$.

Het is vrij gemakkelijk in te zien, dat $\text{BCH}(q)$ geen elementen $\neq 0$ bestaande uit minder dan 5 enen en verder nullen, heeft. Voor het aantal elementen bestaande uit precies 5 enen en verder nullen staat een formule afgeleid in § 15.3 van het boek *The Theory of Error-Correcting Codes* door J. MacWilliams en

N.J.A Sloane (1983). In 1996 publiceert de Leidse wiskundige Marcel van der Vlugt een alternatief, al veel meetkundiger bewijs voor deze formule.

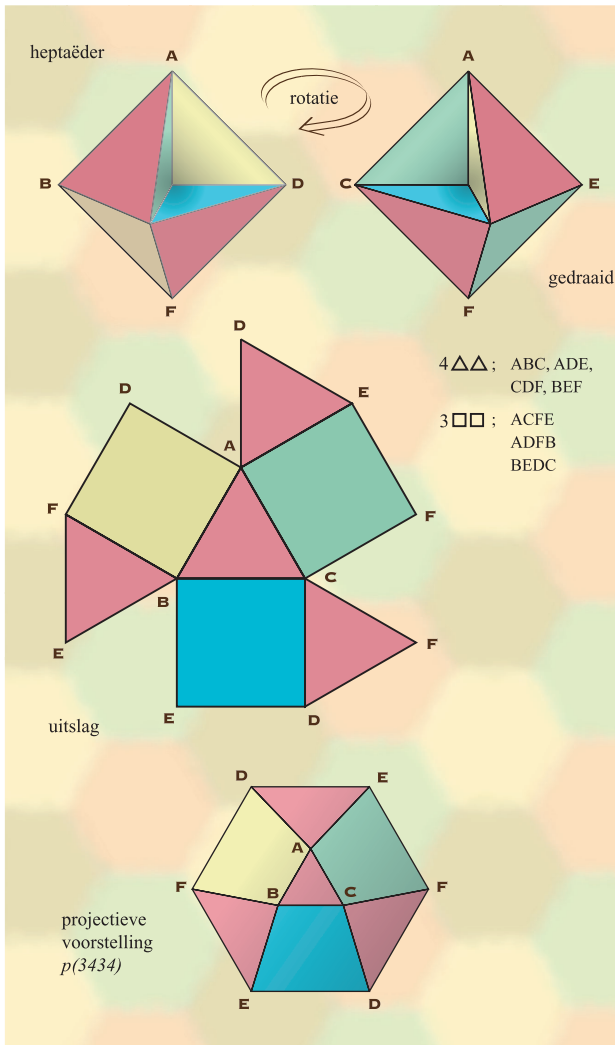
Nog meetkundiger kan het als volgt. Zo'n element in $BCH(q)$ bestaande uit 5 enen en verder nullen, komt overeen met een ongeordende deelverzameling $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{F}_q$ waarin elke $a_j \neq 0$, de a_j zijn onderling verschillend, en ze voldoen aan $a_0 + \dots + a_4 = a_0^3 + \dots + a_4^3 = 0$. Met andere woorden, (a_0, \dots, a_4) is een punt van het diagonaaloppervlak van Clebsch, maar dan gezien als oppervlak over \mathbb{F}_q . Dit oppervlak wordt verkregen door in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ een zekere configuratie van 6 punten op te blazen. Als a van deze punten coördinaten in \mathbb{F}_2 hebben en de overige $6 - a$ niet, dan is het aantal \mathbb{F}_2 -rationale punten op \mathcal{C} gelijk aan $(7 - a) + 3a = 7 + 2a$. Immers, $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ heeft 7 rationale punten, $7 - a$ daarvan leveren ook een punt op \mathcal{C} , de overige a leveren ieder een $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$ en die heeft 3 rationale punten. Anderzijds is, door te gebruiken dat $a + a = 0$ en $a^3 = a$ voor elke $a \in \mathbb{F}_2$, gemakkelijk in te zien dat ieder rationaal punt in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^3$ een punt op \mathcal{C} geeft. En dus heeft \mathcal{C} precies 15 \mathbb{F}_2 -rationale punten, dus $a = 4$.

Van de 6 op te blazen punten zijn er dus 4 rationaal, en 2 onderling geconjugeerd. Dit betekent dat voor m even, *alle* 6 op te blazen punten over \mathbb{F}_q rationaal zijn. Dus over zo'n lichaam heeft \mathcal{C} precies $q^2 + q + 1 - 6 + 6(q + 1)$ rationale punten. En is m oneven, dan is er nog steeds het paar onderling geconjugeerde punten, dus het totaal aantal rationale op \mathcal{C} bedraagt $q^2 + q + 1 - 4 + 4(q + 1)$. Vermenigvuldigen we dit aantal met $(q - 1)$, dan wordt het aantal oplossingen $\neq 0$ van $\sum a_j = 0 = \sum a_j^3$ in \mathbb{F}_q^5 gekregen. Het is niet moeilijk om het aantal oplossingen waarin twee coördinaten gelijk zijn (en dus som 0 hebben!) te vinden. Uiteindelijk nog delen door $5! = 120$ (we zochten immers naar ongeordende 5-tallen) levert het gezochte aantal elementen:

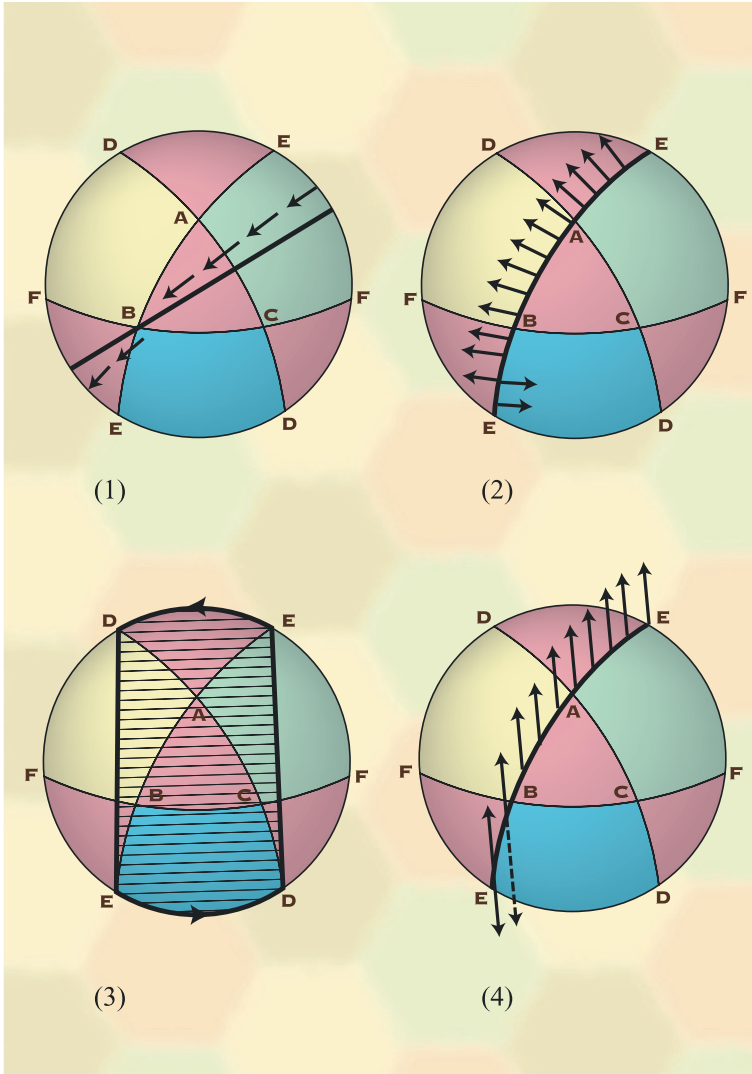
$$\begin{cases} (q - 1)(q - 4)^2/120 & \text{voor } m \text{ even;} \\ (q - 1)(q - 2)(q - 8)/120 & \text{voor } m \text{ oneven.} \end{cases}$$

Kleurenillustraties

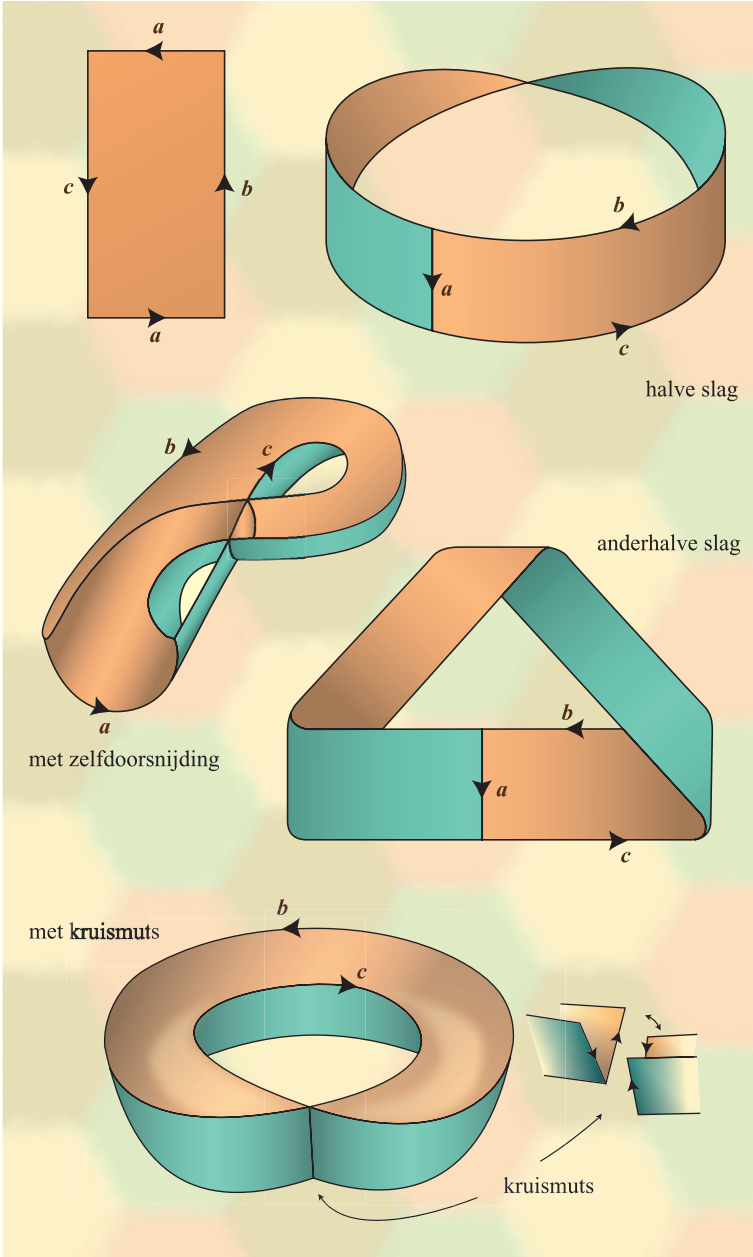
1. J.M. AARTS (PAGINA 3–21)



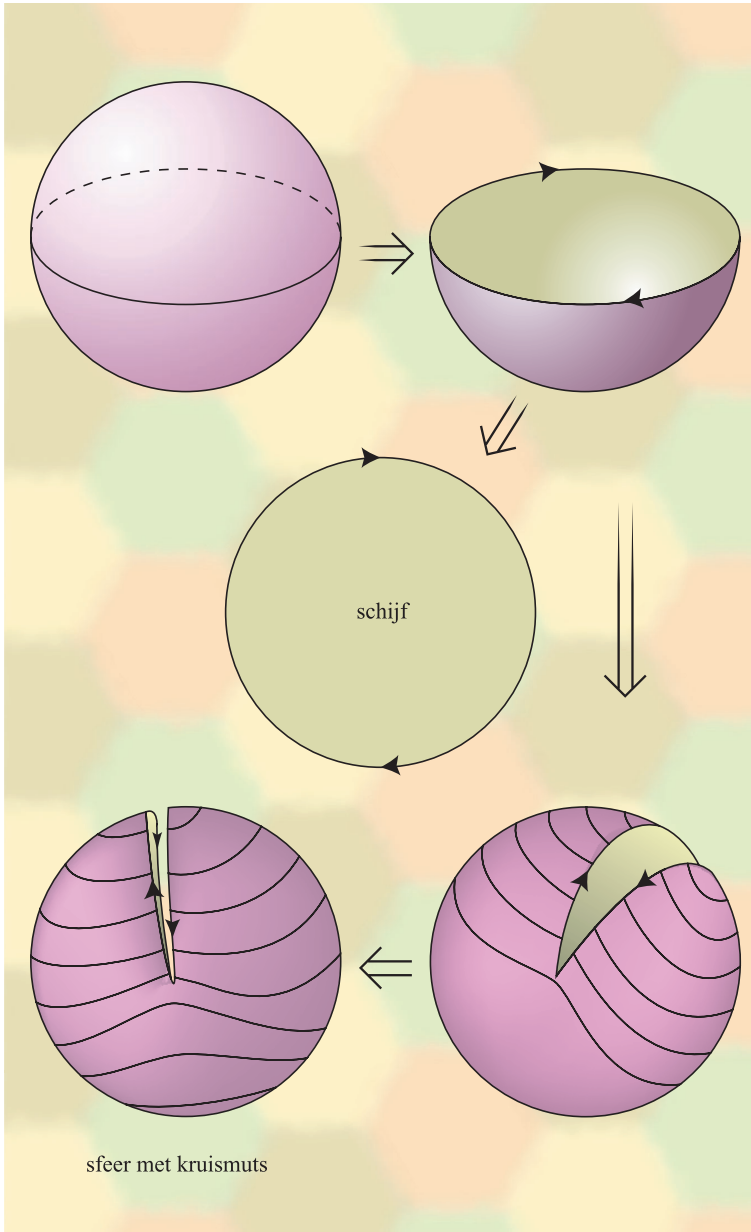
Figuur 1. De heptaëder (3434), ook wel tetrahemihexahedron genaamd



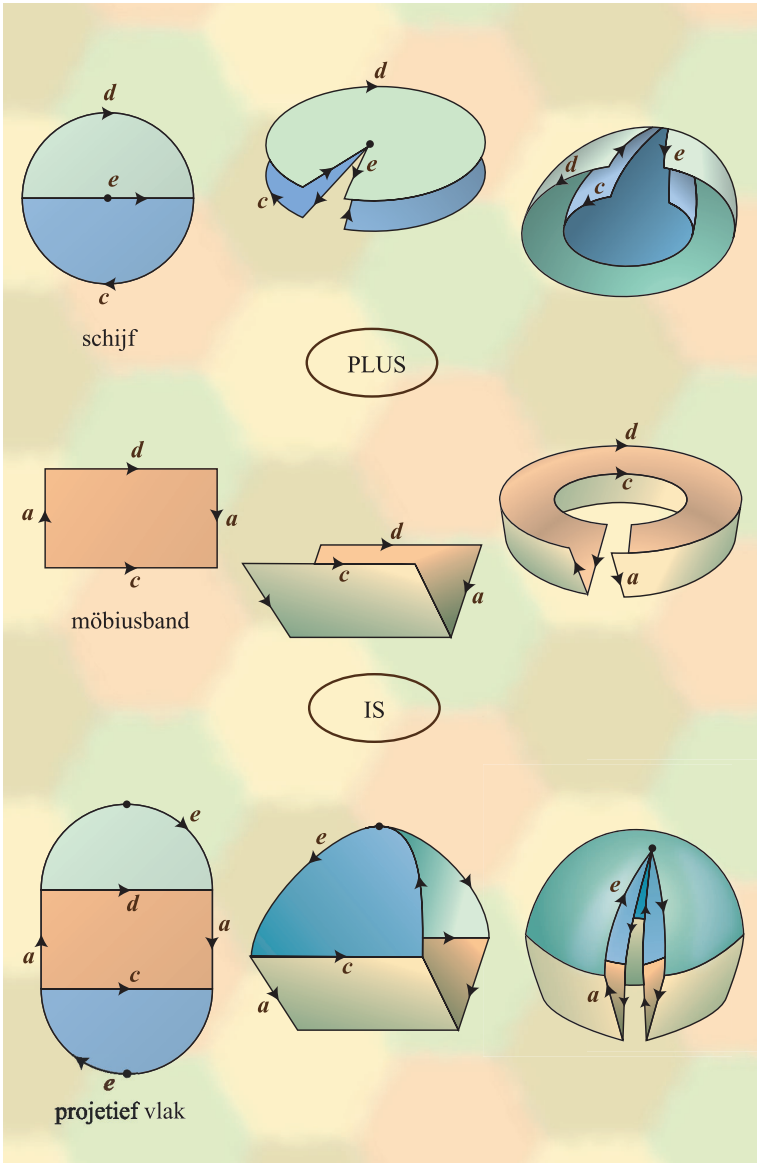
Figuur 2. Merkwaardige eigenschappen van de heptaëder (in projectieve voorstelling)



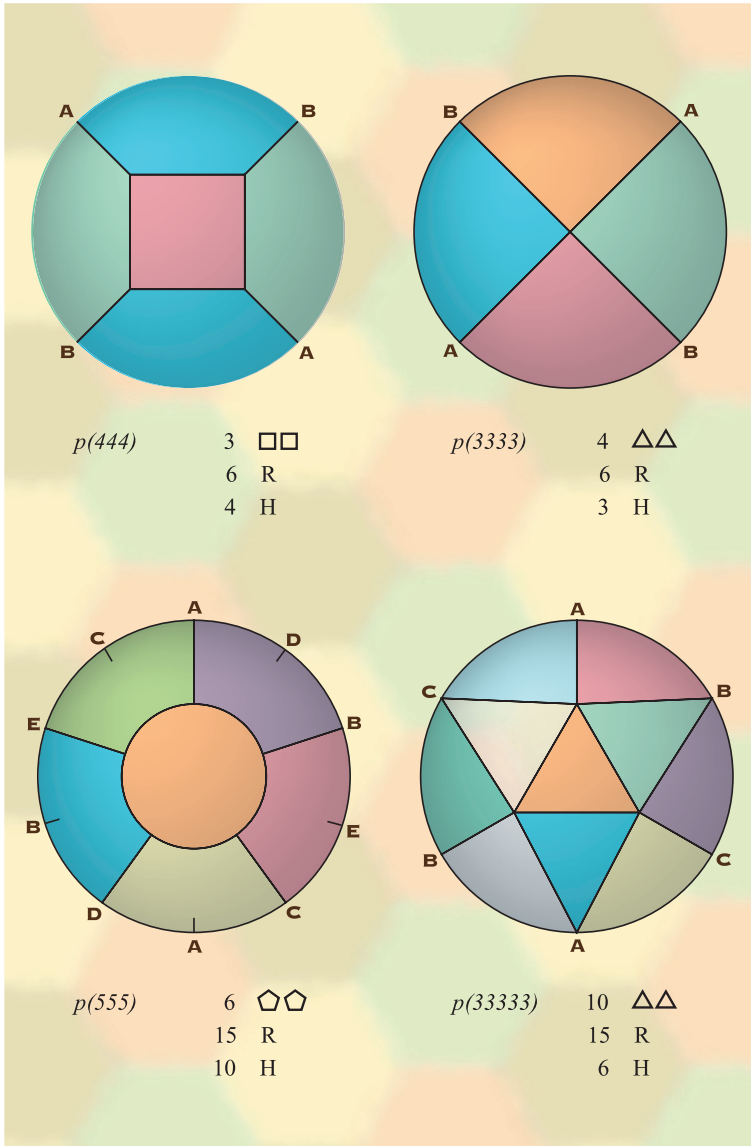
Figuur 3. Vijfmaal de Möbius-band



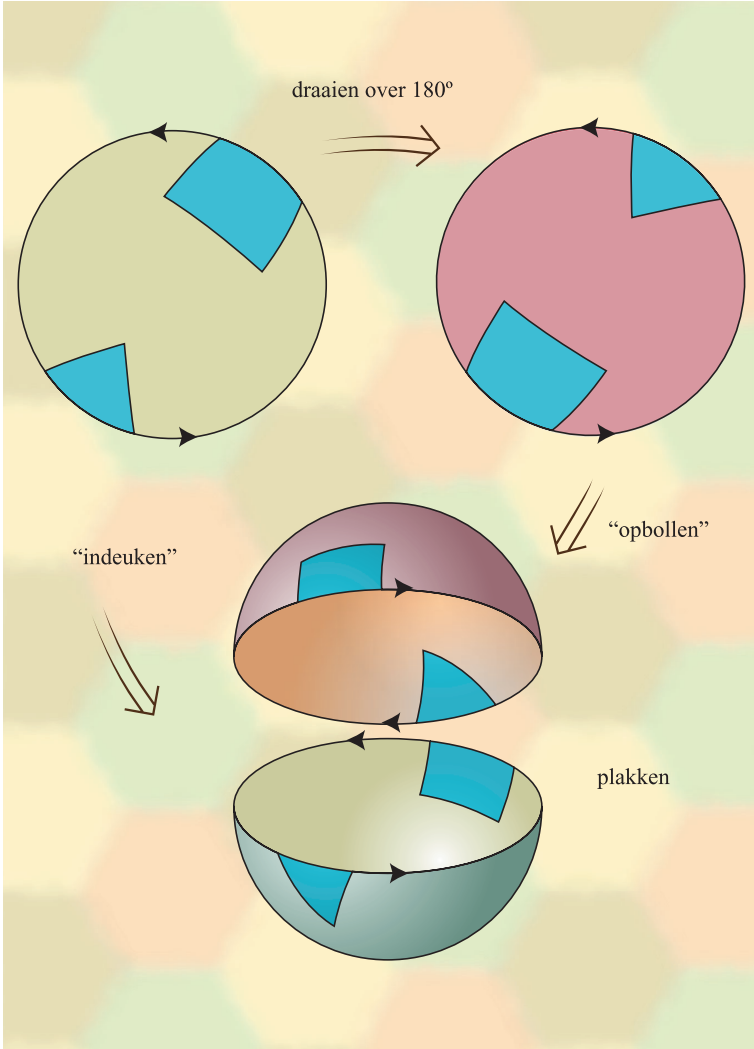
Figuur 4. Ontstaan van schijf met diametraalpuntsidentificatie en van bol met kruismuts



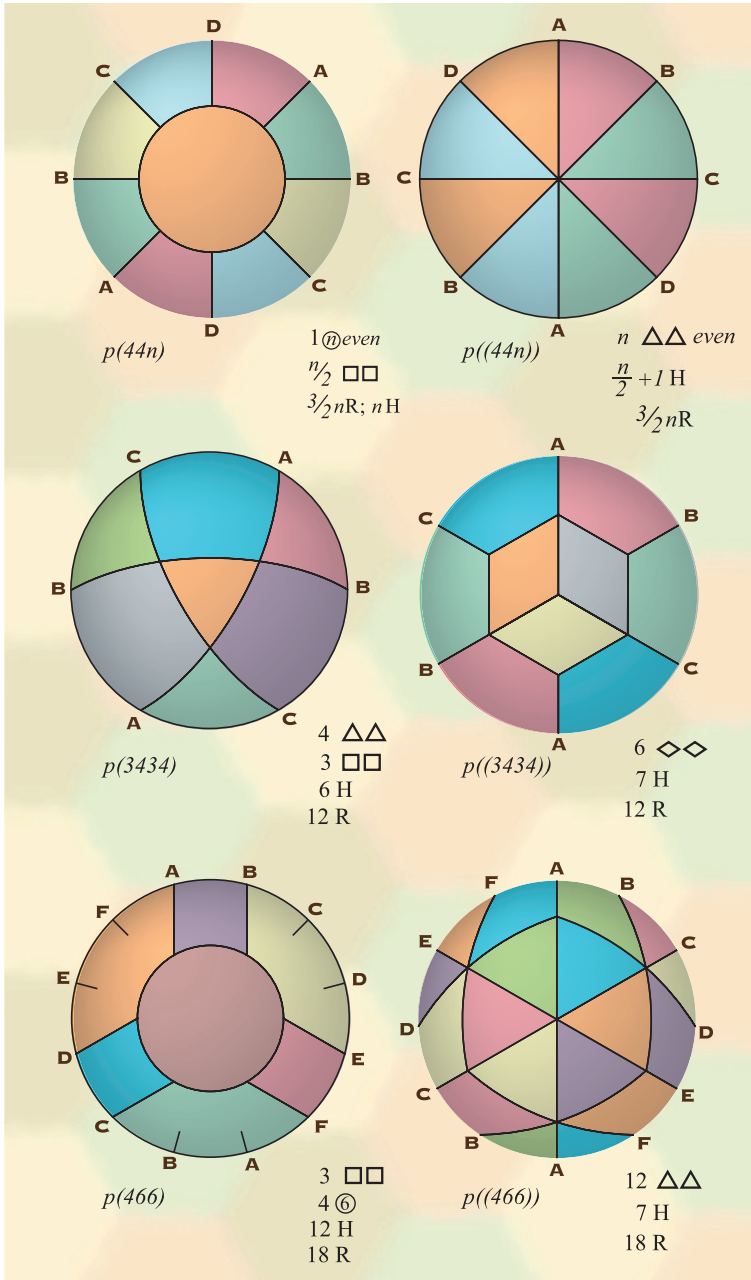
Figuur 5. Het projectieve vlak is de som van een schijf en een Möbius-band



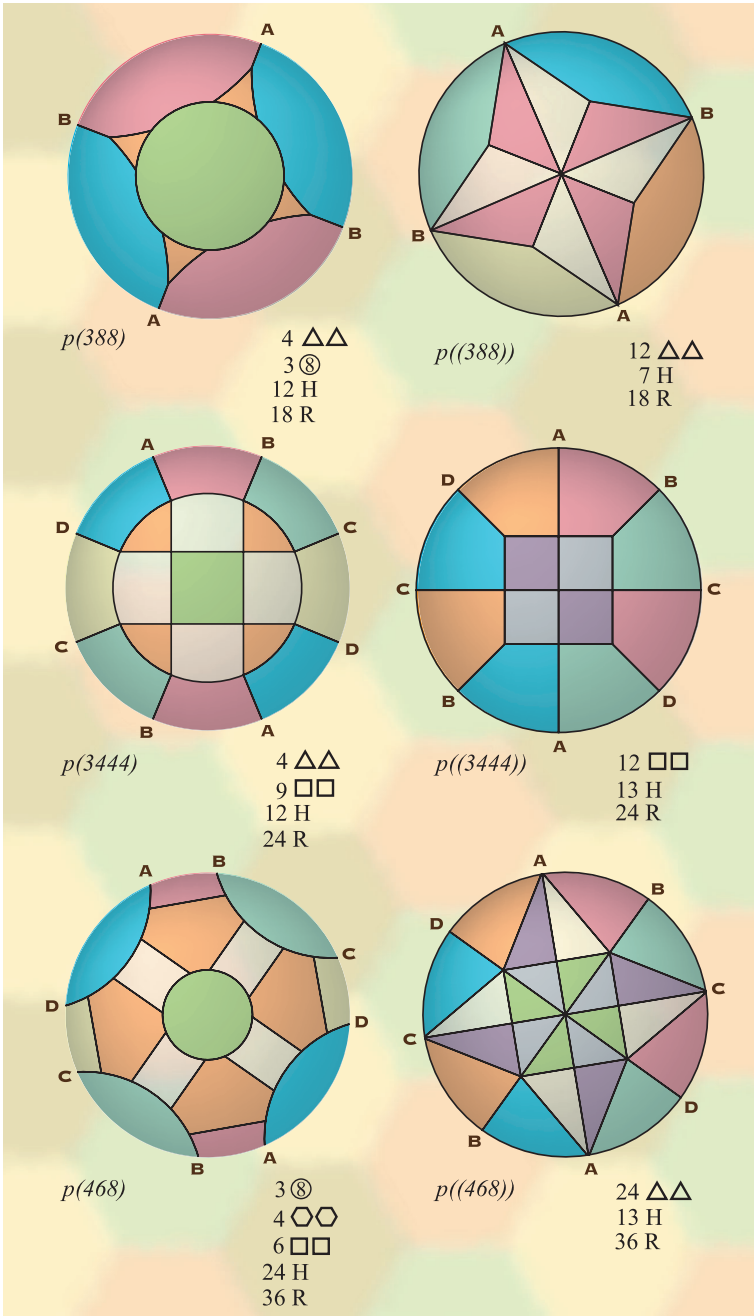
Figuur 6. De regelmatige projectieve veelvlakken



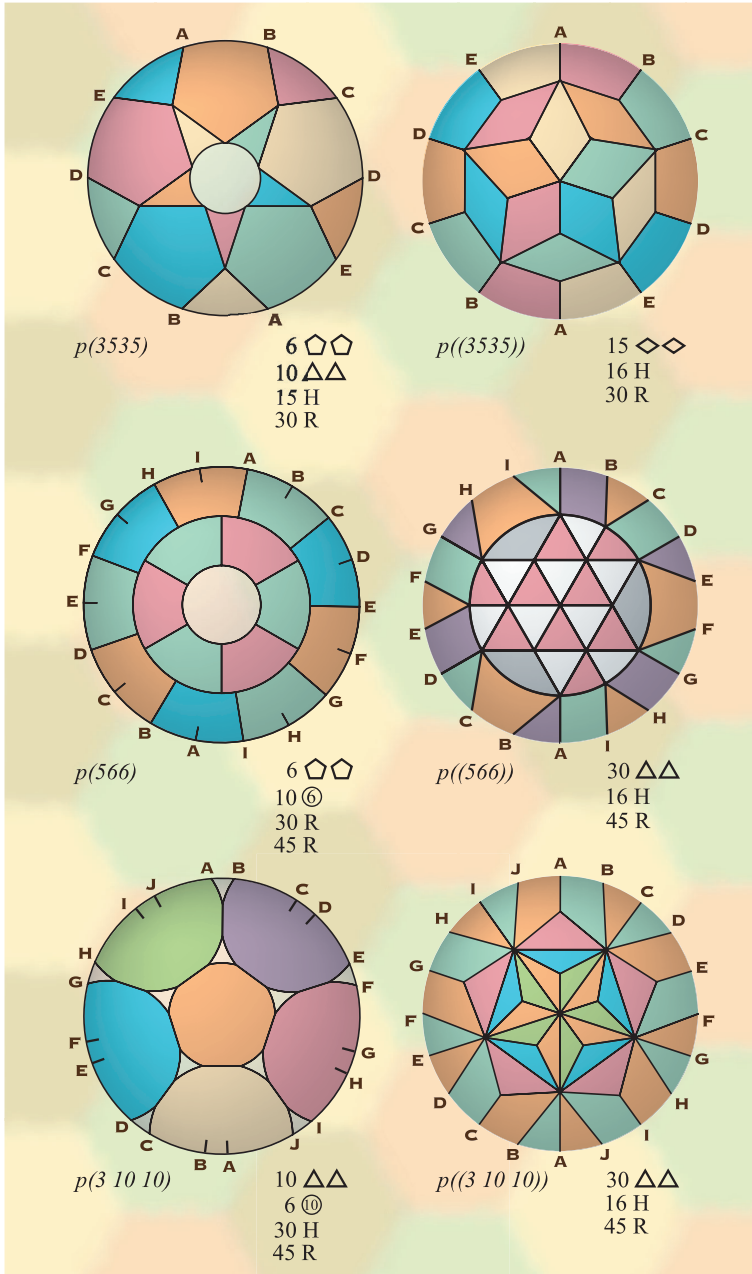
Figuur 7. Verdubbelingsstelling



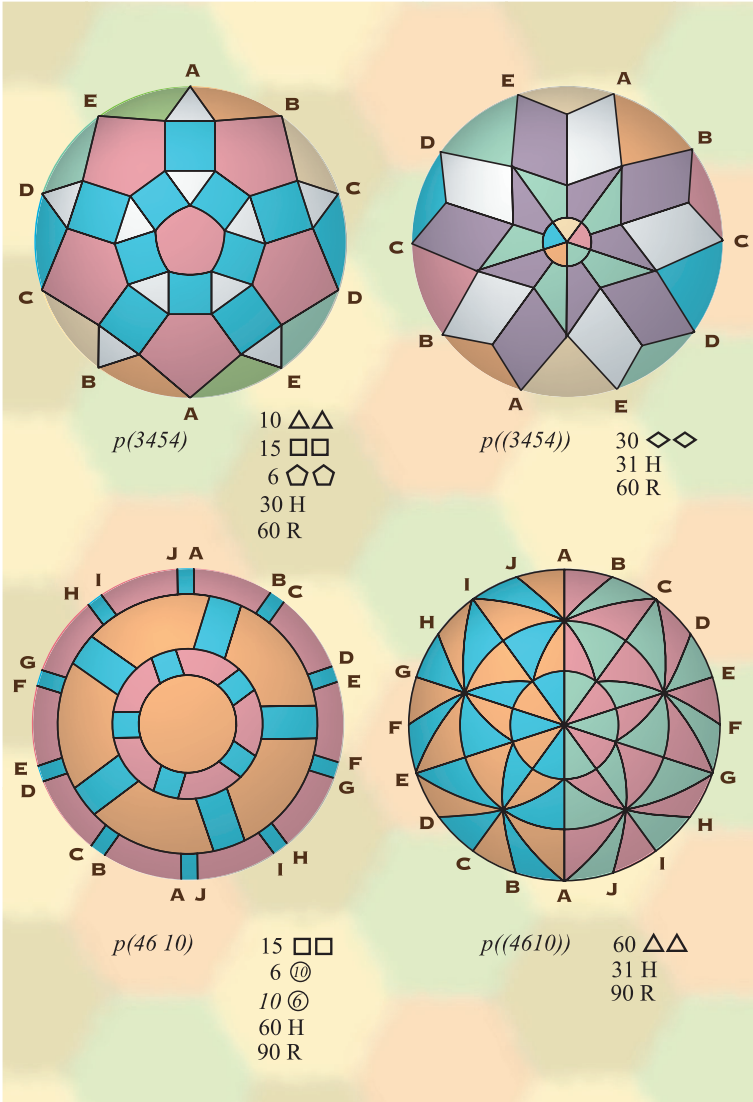
Figuur 8. Halfregelmatige projectieve veelvlakken I; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort



Figuur 9. Halfregelmatige projectieve veelvlakken II; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort

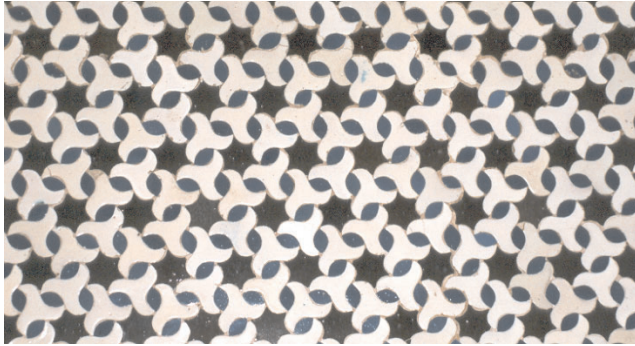


Figuur 10. Halfregelmatige projectieve veelvlakken III; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort



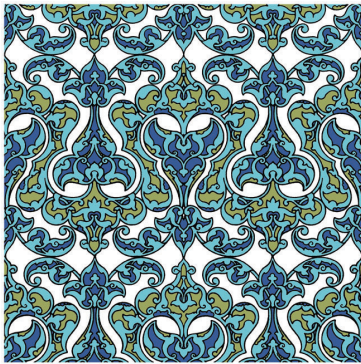
Figuur 11. Halfregelmatige projectieve veelvlakken IV; linkerkolom eerste soort, rechterkolom tweede soort

2. J. VAN DE CRAATS (PAGINA 23–36)



Figuur 1. Een patroon uit het Alcazar in Sevilla

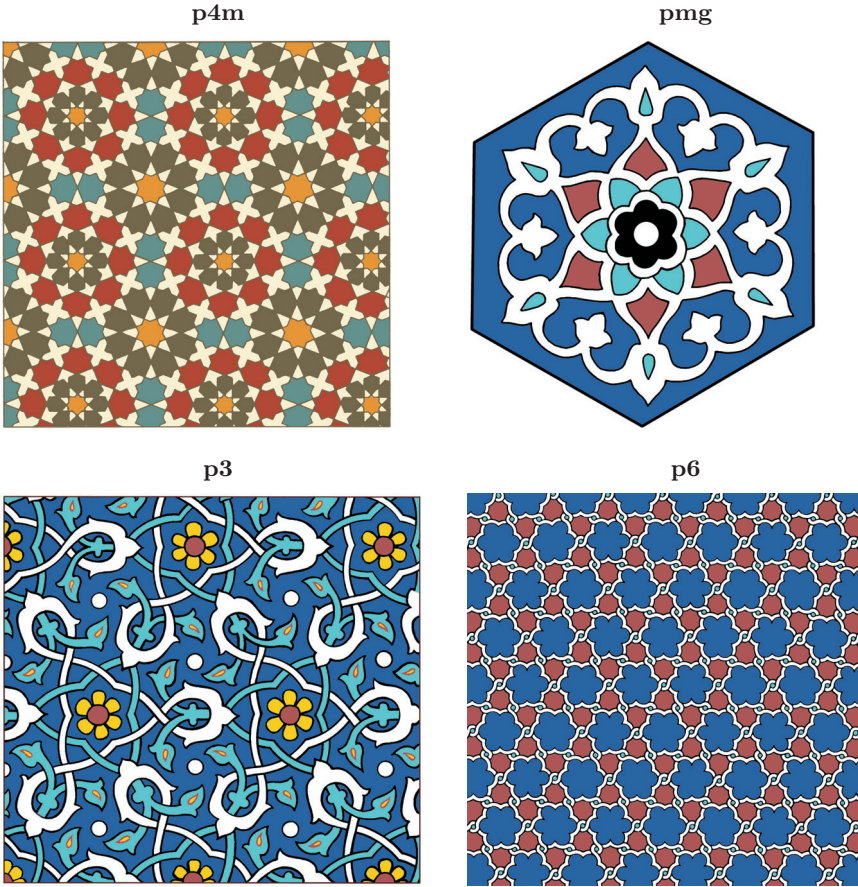
Een rozet met symmetriegroep D_6



Een rozet met symmetriegroep C_6

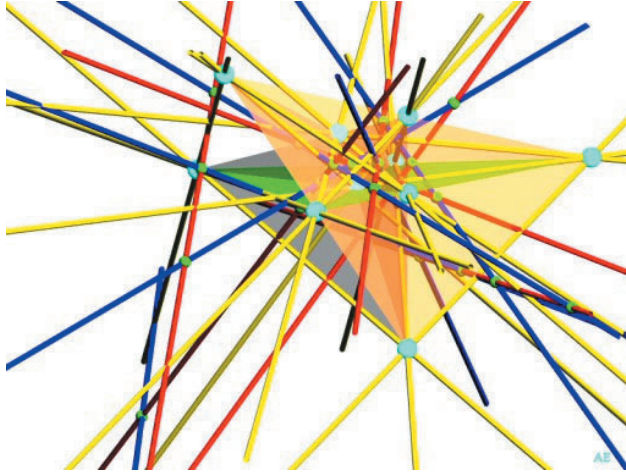


Figuur 2. Turkse rozetpatronen



Figuur 9. Voorbeelden van islamitische patronen

3. J. TOP (PAGINA 37-57)

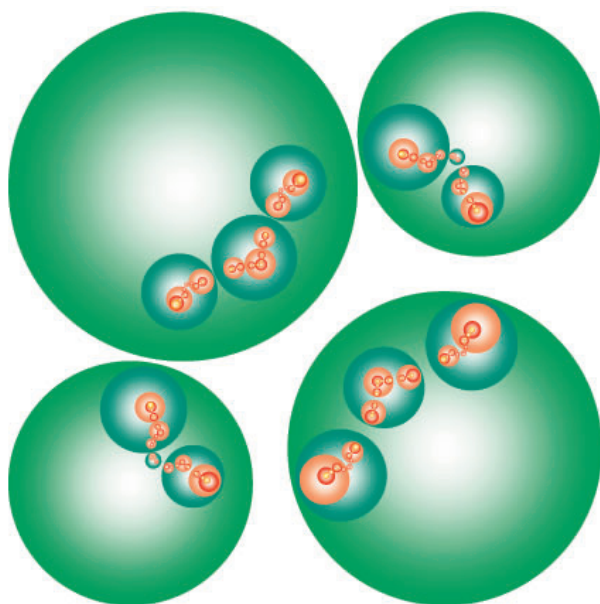


Ligging van de 27 lijnen; zie pagina 44

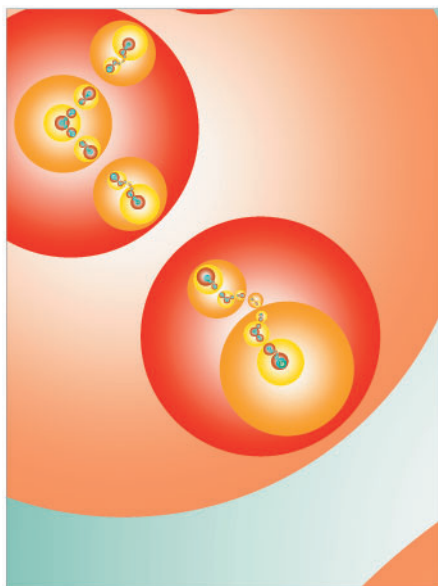


Beeld van het diagonaaloppervlak van Clebsch in Düsseldorf; zie pagina 50

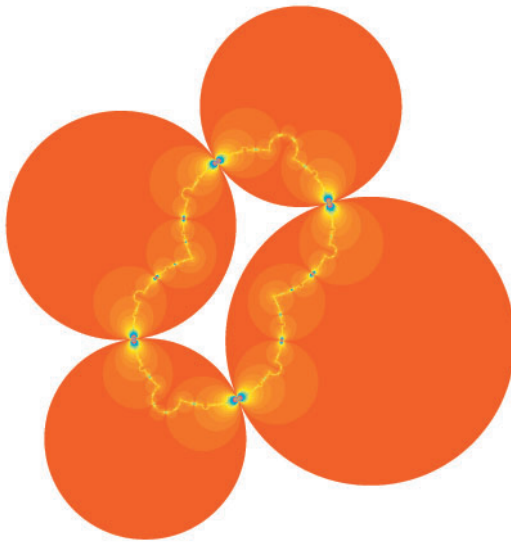
4. F. BEUKERS (PAGINA 81–102)



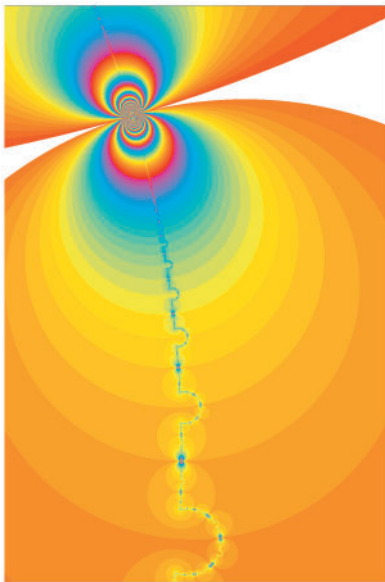
Plaat 1. Indra's parels



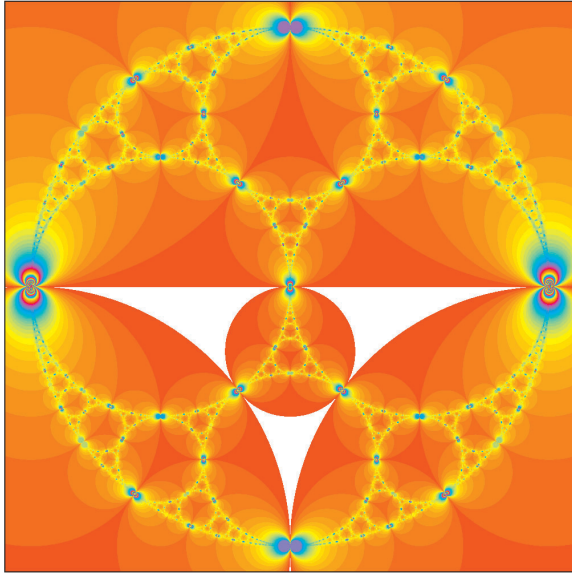
Plaat 2. Indra's parels; close-up



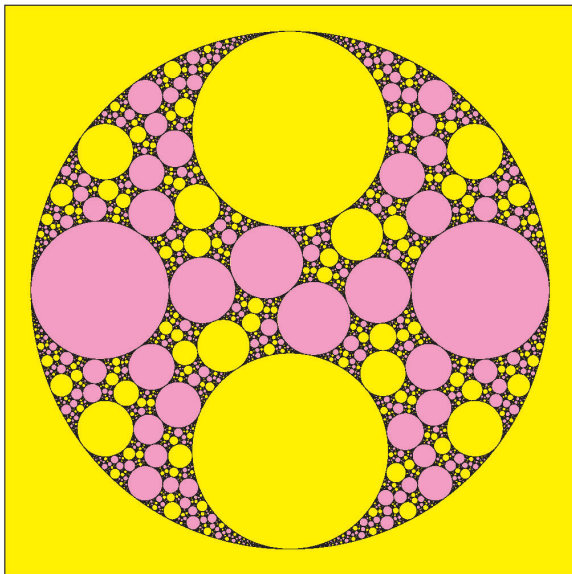
Plaat 3. *Indra's halsketting*



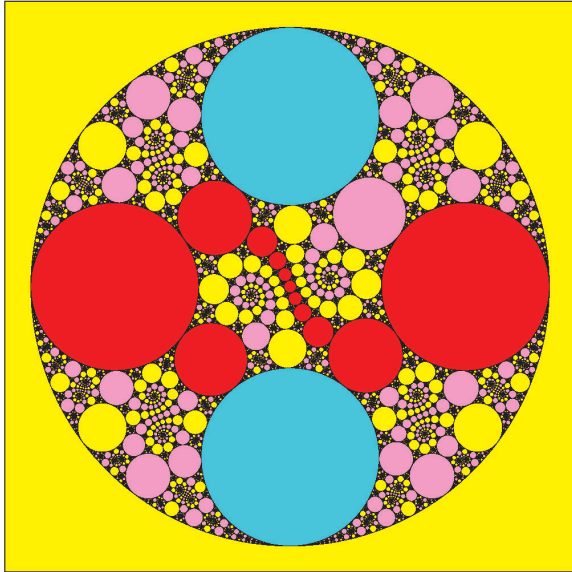
Plaat 4. *Indra's halsketting; close-up*



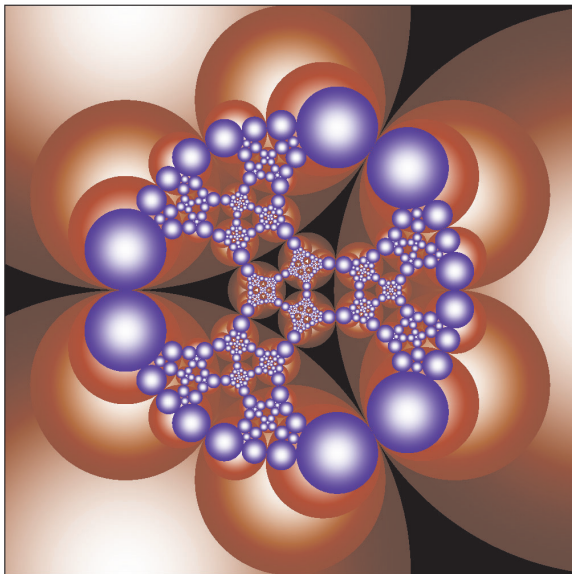
Plaat 5. Net van Apollonius



Plaat 6. Op de Maskit-rand: $a^{10}B$ is parabolisch



Plaat 7. Op de Maskit-rand: $aaaBaaB$ is parabolisch



Plaat 8. Vrije groep met drie voortbrengers

5. J.P. HOGENDIJK (PAGINA 111–123)

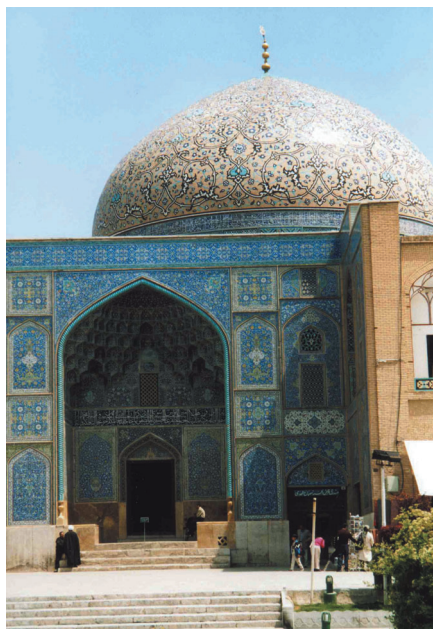


Foto 1. Lotfollah Moskee, Isfahan, Iran

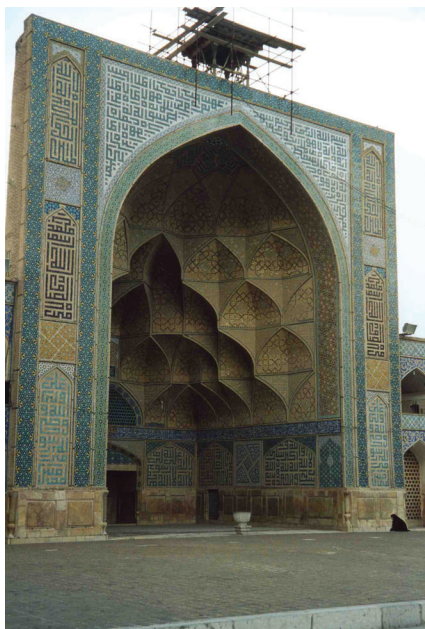


Foto 2. Vrijdagmoskee, Isfahan, Iran

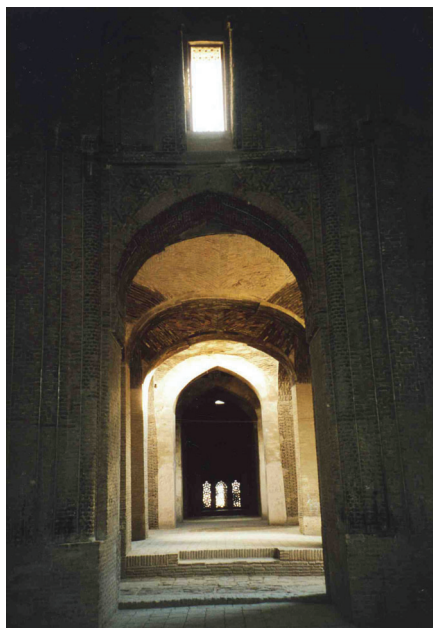
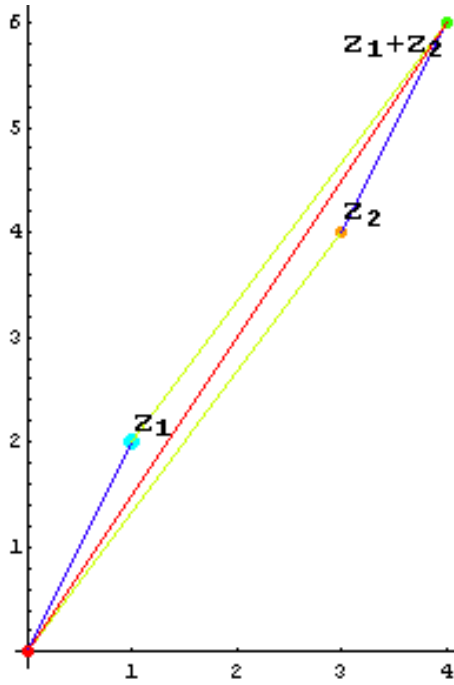
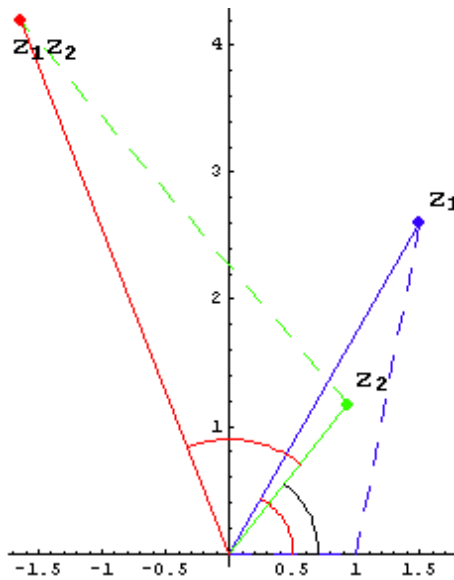


Foto 3. In de Noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee, Isfahan, Iran

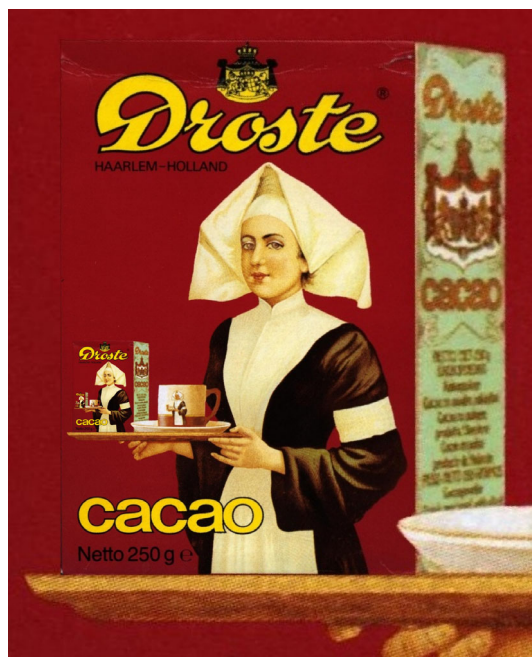
6. B.J.H. JANSEN EN H.W. LENSTRA (PAGINA 125–140)



Figuur 2. Het optellen van twee complexe getallen



Figuur 3. Het vermenigvuldigen van twee complexe getallen



Figuur 4. Het Droste-pakje



Figuur 19. Het Droste-pakje verescherd



Figuur 20. Het Droste-pakje teruggetrokken over de afbeelding $f : z \mapsto e^z$

De parels van Indra

F. Beukers

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

e-mail: beukers@math.uu.nl

1. INLEIDING

Aanleiding voor deze voordracht is het boek *Indra's Pearls* van D. Mumford, C. Series en D. Wright, Cambridge University Press 2002. Als u dit boek doorbladert, lijkt het op het eerste gezicht alweer een boek over fractals. In zekere zin is dat misschien zo, want veel van de mooie afbeeldingen hebben een fractalachtige structuur. Lezen we echter de inleiding, dan zien we dat het over iets heel anders gaat, namelijk discrete ondergroepen van $SL(2, \mathbb{C})$, ook wel *kleinse groepen* genoemd, naar de Duitse wiskundige Felix Klein. Als u niet weet wat kleinse groepen zijn, dan is dat niet erg. In de volgende hoofdstukken van deze syllabus zal dit stap voor stap uitgelegd worden. In deze inleiding wil ik echter wat globaler ingaan op het belang van het onderwerp binnen de wiskunde. De precieze definities komen later wel.

Kleinse groepen en de bijbehorende automorfe functies hebben vanaf het einde van de 19e eeuw een cruciale rol gespeeld in veel takken van de meetkunde en de getaltheorie. Modulaire vormen, zo belangrijk bij het bewijs van de laatste stelling van Fermat, zijn een speciaal geval en tevens meest uitgewerkte geval van deze tak van wiskunde. In het begin van de 20e eeuw werden ze vooral bekeken vanwege hun rol voor de classificatie van zogenaamde *Riemann-oppervlakken* en de studie van lineaire differentiaalvergelijkingen in het complexe vlak (monodromiegroepen). Belangrijke pioniers op dit gebied waren Franse wiskundige Henri Poincaré (1854–1912) en de Duitse wiskundige Felix Klein (1849–1925). De eerstgenoemde merkte al op, dat $SL(2, \mathbb{C})$ niet alleen op de Riemann-bol werkt, maar ook op heel natuurlijke manier als congruentiegroep op de driedimensionale hyperbolische ruimte. Deze gedachte is rond 1977 door W. Thurston op spectaculaire wijze gebruikt bij zijn werk over de classificatie van driedimensionale ruimten.

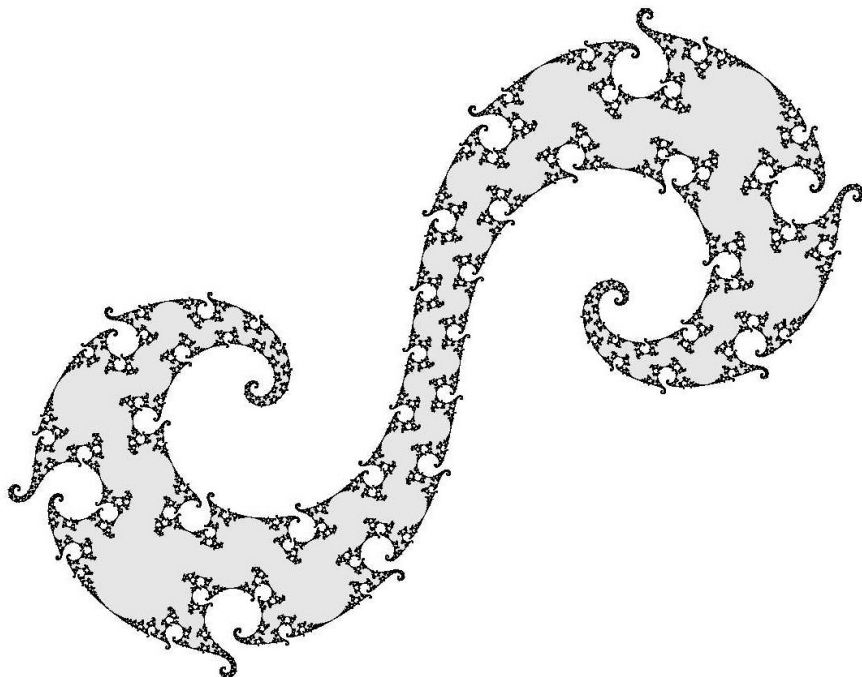
Over kleinse groepen is heel veel bekend en ook veel nog onbekend. Ook vanwege alle toepassingen maakt dit het tot een fascinerend gebied. Er zijn diverse boeken (voor experts) over dit onderwerp geschreven zoals dat van Maskit, Beardon en Maclachlan/Reid. Het is daarbij boeiend om te zien hoe ver wiskundigen in dit onderwerp zijn doorgedrongen. Opvallend is echter dat dit geheel zonder visuele voorstellingen gebeurde. Bovengenoemde boeken bevatten nauwelijks plaatjes. De fascinatie van het onderwerp zat meer in het brein van de wiskundigen. Sinds de tachtiger jaren van de vorige eeuw hebben onderzoekers, waaronder de schrijvers van dit boek, zich beziggehouden met visualisatie van kleinse groepen. De figuren die op het computerscherm

ontstonden waren van zo'n verbluffende schoonheid, dat de auteurs besloten dit onderwerp ook toegankelijk te maken voor een breder wiskundig geïnteresseerd publiek. Dat nobele streven heeft geleid tot de verschijning van het boek *Indra's Pearls*. Daarmee hebben de kleinse groepen een gezicht gekregen, dat zelfs op niet-experts grote indruk moet maken. Wellicht dat u met het zien van de plaatjes ook bereid bent om iets meer van het onderwerp te weten te komen. Als dat zo is, dan beschouw ik deze voordracht als geslaagd.

Uiteraard is deze syllabus geen vervanging van *Indra's Pearls*. Hoewel we de verhaallijn van dit boek volgen, is deze syllabus slechts een beknopte, en op vele plaatsen te summiere, samenvatting van de eerste helft van het boek. De plaatjes in dit artikel zijn alle gemaakt met het Fortranprogramma *kleinian* van David Wright, dat te vinden is op zijn website klein.math.okstate.edu, waar ook veel ander materiaal te vinden is, met name onder de link

klein.math.okstate.edu/IndrasPearls

Het programma *kleinian* is helaas wat spartaans, men moet het zelf compileren en er is geen handleiding. De werking moet men afleiden uit de meegeleverde voorbeeldscripts.



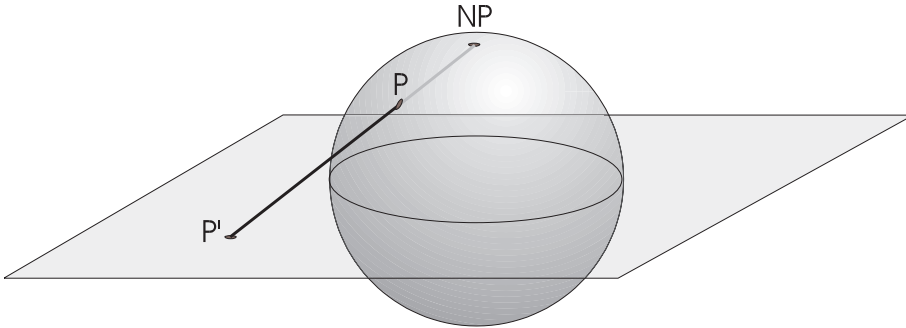
2. MÖBIUS-TRANSFORMATIES

In de meetkunde van het platte vlak spelen gelijkvormigheidstransformaties een belangrijke rol. Hieronder verstaan we afbeeldingen van het vlak naar zichzelf die niet noodzakelijk de lengte van objecten behouden (dat zijn congruenties), maar wel de hoeken. Dergelijke afbeeldingen noemen we ook wel

hoektrouw. Voorbeelden zijn draaiingen, vergrotingen en verschuivingen van het vlak en combinaties daarvan. Spiegelingen zijn ook hoekbehoudend. Alleen zullen wij ze in dit verhaal buiten beschouwing laten, omdat wij ons willen beperken tot *oriëntatiebehoudende* afbeeldingen. Een linkerhandschoen gaat bij spiegeling over in een rechterhandschoen, en daarom is spiegeling niet oriëntatiebehoudend.

We zullen hoektrouwe en oriëntatiebehoudende afbeeldingen voortaan *conforme* afbeeldingen noemen. Onze keuze voor conforme afbeeldingen is een bewuste. Dergelijke afbeeldingen kunnen we mooi met complexe getallen voorstellen. Kies namelijk een complexe coördinaat in het complexe vlak, dan kan ieder van zulke afbeeldingen worden weergegeven met $z \mapsto az + b$ voor geschikt gekozen $a, b \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$. Bijvoorbeeld, $z \mapsto az$ is een verdraaiing over een hoek $\text{argument}(a)$ en vergroting met factor $|a|$. En $z \mapsto z + b$ is een translatie over de vector gegeven door b .

Het wordt nog veel interessanter als we kijken naar conforme afbeeldingen van een andere figuur naar zichzelf, namelijk de bol. Ook deze kunnen we door gebruik van complexe getallen karakteriseren. We maken daarbij gebruik van zogenaamde *stereografische projectie* die de punten van de bol, op 1 punt na, met \mathbb{C} identificeert. Bekijk het volgende plaatje.



We hebben de bol B met straal 1 en middelpunt $(0, 0, 0)$ getekend. Het xy -vlak hierin zien we als het complexe vlak. De stereografische projectie van een punt $P \in B$ ontstaat door een rechte lijn door P en de noordpool NP van de bol te trekken en deze met het horizontale vlak te snijden in het geprojecteerde punt P' . Het enige punt op de bol waarbij dit niet gaat is NP zelf. De verbindingslijn met NP zou een raaklijn aan de noordpool zijn, die het vlak uiteraard niet snijdt. Dit is de reden dat we NP vaak identificeren met het fictieve punt ∞ .

Het mooie van stereografische projectie is, dat dit ook een hoektrouwe afbeelding is. Verder, als we een afbeelding $f : B \rightarrow B$ hebben, dan correspondeert hiermee, via stereografische projectie, een afbeelding $\mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$. We hebben de volgende stelling.

STELLING 2.1 *De conforme afbeeldingen $f : B \rightarrow B$ worden gegeven door $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, waarin $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zó dat $ad - bc = 1$.*

Een functie van het type $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ is complex differentieerbaar. Misschien heeft u ooit het vak functietheorie gevolgd. Daarin leren we als eerste dat een complex differentieerbare functie f , waarvan de afgeleide $f'(z_0)$ in een punt z_0 niet nul is, de functie f in een omgeving van z_0 conform is.

Een voorbeeld, $z \mapsto 1/z$. Deze verwisselt de punten 0 en ∞ . Dat is misschien een beetje onwennig omdat het ons altijd verboden werd door 0 te delen, maar in dit geval is het gewoon gemakkelijk taalgebruik voor het feit dat de afbeelding $z \rightarrow 1/z$ noord- en zuidpool van de bol met elkaar verwisselt. Iets nadere beschouwing leert dat $z \mapsto 1/z$ overeenkomt met draaiing van B over 180 graden met draaiingsas door de punten 1, -1 (die blijven immers vast onder $z \mapsto 1/z$).

Transformaties van de vorm $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ worden vaak *Möbius-transformaties* of *gebroken lineaire afbeeldingen* genoemd. Bij elk zo'n transformatie hoort een 2×2 -matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Verder noemen we B ook vaak de *Riemann-bol* om aan te geven dat we een bol hebben, waarop ook een complexe structuur is gelegd. De gebruikelijke notatie voor de Riemann-bol is: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Strikt genomen staat deze notatie voor de projectieve lijn over de complexe getallen, maar dat hoeven we voor ons verhaal niet te weten. Wel zullen we de notatie gebruiken.

OPGAVE 2.2 *Stel we hebben twee matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ zó dat*

$$ad - bc = a'd' - b'c' = 1, \quad \text{en} \quad \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \quad \text{voor alle } z \in \mathbb{C}.$$

Laat dan zien dat

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Met andere woorden, de matrix bij een Möbius-transformatie is op teken na bepaald.

OPGAVE 2.3 *Stel we hebben twee Möbius-transformaties T, T' met matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ respectievelijk $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Ga na dat de opeenvolging $T' \circ T$ (ëerst T , daarna T') weer een Möbius-transformatie is met matrix $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

De 2×2 -matrices met determinant 1 worden aangegeven met $SL(2, \mathbb{C})$. Uit bovenstaande opgaven zien we dat de groep van Möbius-transformaties (conforme afbeeldingen van de bol) in feite de matrixgroep $SL(2, \mathbb{C})/\pm 1$ is.

OPGAVE 2.4 *Laat zien dat de Möbius-transformaties die ∞ naar zichzelf afbeelden, precies de afbeeldingen $z \rightarrow \alpha z + \beta$ zijn met $\alpha \neq 0$. Met andere woorden, de conforme afbeeldingen van het vlak naar zichzelf zijn bevat in de Möbius-transformaties.*

OPGAVE 2.5 (Lastig) De boldraaiingen zijn uiteraard ook conform. Ze corresponderen met een speciale klasse van 2×2 -matrices, namelijk $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad a\bar{b} + c\bar{d} = 0.$$

Laat dit zien. Matrices van deze speciale vorm geven we aan met $SU(2, \mathbb{C})$, de 2×2 speciale unitaire matrices.

Met welke boldraaiing correspondeert de Möbius-transformatie $z \rightarrow 1/z$?

Een belangrijke eigenschap van conforme afbeeldingen is de volgende.

STELLING 2.6 *Het beeld van een cirkel op de Riemann-bol onder een conforme afbeelding is weer een cirkel.*

Let op, met cirkels bedoelen we hier niet alleen de zogenaamde grote cirkels, maar alle snijfiguren van B met een plat vlak.

Bij stereografische projectie van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ naar \mathbb{C} gaan cirkels in het algemeen in cirkels in \mathbb{C} over, behalve de cirkels door de noordpool NP gaan. De projecties daarvan worden rechte lijnen in \mathbb{C} (ga dit svp zelf na). Uit de voorgaande stelling volgt nu.

STELLING 2.7 *Het beeld van een cirkel of rechte lijn in \mathbb{C} onder een Möbius-transformatie is weer een cirkel of rechte lijn.*

Een klein voorbeeld. Beschouw de cirkel C met straal 1 en middelpunt $(0, 1)$ en bekijk het beeld onder $z \rightarrow 1/z$. We weten dat het beeld weer een rechte lijn of cirkel is. Merk op dat $0 \in C$. Dit wordt naar ∞ afgebeeld. Dat betekent dat het beeld van C een rechte lijn wordt, een cirkel zou begrensd zijn. Om de rechte lijn te bepalen, kunnen we volstaan met de berekening van twee punten. $i+1 \in C$ gaat over in $1/(1+i) = 1/2 - i/2$ en $2i \in C$ gaat over in $1/(2i) = -i/2$. We krijgen dus de lijn door de punten $1/2 - i/2$ en $-i/2$. Dat is precies de lijn $y = -1/2$.

3. CLASSIFICATIE VAN MÖBIUS-TRANSFORMATIES

Het is mogelijk om zonder al te veel gebruik van formules een beeld te krijgen van het gedrag van Möbius-transformaties. Een bijzondere rol wordt daarbij gespeeld door de *fixpunten*.

DEFINITIE 3.1 *Een fixpunt van een Möbius-transformatie T is een $z_0 \in \mathbb{C} \cup \infty$ zó dat $T(z_0) = z_0$.*

Ze zijn ook gemakkelijk uit te rekenen. We nemen aan dat T niet de identieke afbeelding Id is. Als $T = \text{Id}$, dan zijn alle punten immers fixpunt. Stel dat de matrix van een Möbius-transformatie gegeven wordt door $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. We moeten dan de vergelijking

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0$$

oplossen.

We nemen eerst aan dat $c = 0$. In dat geval is ∞ zeker een fixpunt. Verder houden we de vergelijking $az_0 + b = dz_0$ over. Als $a \neq d$ volgt hieruit 1 oplossing, namelijk $z_0 = b/(d - a)$. Dit is het tweede fixpunt. Als $a = d$ dan hebben we geen oplossing, tenzij $b = 0$. Maar in dat laatste geval is de matrix een scalair veelvoud van de identiteitsmatrix en T triviaal, hetgeen we uitgesloten hadden.

We nemen nu aan dat $c \neq 0$. Dan krijgen we de vergelijking

$$cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0.$$

Deze heeft twee oplossingen als de discriminant $(d - a)^2 + 4bc$ niet nul is en precies 1 oplossing als hij wel nul is. Merk nu op dat $(d - a)^2 + 4bc = (d + a)^2 - 4ad + 4bc = (d + a)^2 - 4$. De discriminant wordt dus nul precies dan als $a + d = \pm 2$.

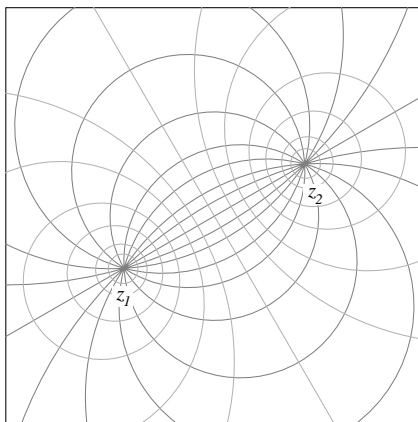
Samenvattend hebben we de volgende stelling.

STELLING 3.2 *Zij T een Möbius-transformatie die niet de identiteit is en zij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de bijbehorende determinant 1 matrix. Dan heeft T precies twee fixpunten als $a + d \neq \pm 2$ en precies 1 fixpunt als $a + d = \pm 2$.*

Stel nu dat we een Möbius-transformatie T hebben met precies twee fixpunten z_1, z_2 . De verzameling cirkels en de rechte lijn die door z_1, z_2 gaan, noemen we de *cirkelbundel* door z_1, z_2 . Neem een cirkel C uit deze bundel. Het beeld $T(C)$ is weer een cirkel (of rechte lijn). Verder bevat $T(C)$ weer de punten z_1, z_2 , het waren immers fixpunten van T . We concluderen:

T beeldt de cirkelbundel door z_1 en z_2 af naar zichzelf.

De verzameling cirkels loodrecht op de cirkels uit een bundel vormen ook weer een bundel, de zogenaamde *cirkels van Apollonius* behorend bij de punten z_1, z_2 .



Omdat T hoektrouw is, zal het beeld van een Apollonius-cirkel weer een Apollonius-cirkel zijn. Concluderend, in bovenstaand plaatje zien we twee families van cirkels, en een cirkel uit elk van de families gaat onder T over in een cirkel van dezelfde familie.

OPGAVE 3.3 We geven hier een preciezer definitie van het begrip cirkelbundel. Zij C_1, C_2 een tweetal verschillende cirkels. Geef hun vergelijkingen aan met $F_1(x, y) = 0$ en $F_2(x, y) = 0$, waarin $F_i(x, y) = a_i(x^2 + y^2) + b_ix + c_iy + d_i$ voor $i = 1, 2$. De familie van cirkels gegeven door vergelijkingen van de vorm $\lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0$, met λ, μ niet beide nul, noemen we een cirkelbundel.

1. Voor welke keuzen van λ, μ stelt de vergelijking $\lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0$ een rechte lijn voor? In elke cirkelbundel komt precies 1 rechte lijn voor.
2. Stel dat C_1 en C_2 elkaar snijden in een tweetal verschillende punten P, Q . Laat zien dat elke cirkel uit de bundel door P en Q gaat.
3. Stel dat C_1 en C_2 elkaar niet snijden. Laat zien dat de bundel precies twee cirkels bevat met straal nul. Noem de middelpunten van deze cirkels $P_1 = (a_1, b_1)$ en $P_2 = (a_2, b_2)$. Laat zien dat de cirkelbundel gegeven wordt door vergelijkingen van de vorm $\lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0$ met $F_i(x, y) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$. Concludeer hieruit dat de cirkels uit deze bundels precies de verzameling vormen van alle punten X waarvan de verhouding van de afstanden $|X - P_1|$ en $|X - P_2|$ een gegeven constante is (dit is de meetkundige definitie van Apollonius-cirkels).
4. Stel dat C_1 en C_2 elkaar in precies 1 punt snijden. Maak een schets van de bijbehorende cirkelbundel.

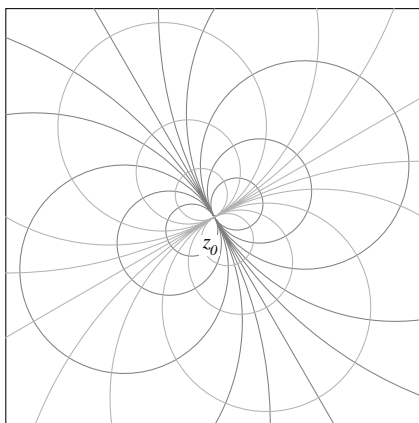
STELLING 3.4 Zij $T \neq \text{Id}$ een Möbius-transformatie met twee fixpunten $z_1, z_2 \neq \infty$, die eventueel mogen samenvallen. Dan geldt $T'(z_1)T'(z_2) = 1$.

Het bewijs van deze stelling volgt door direct de afgeleide van T uit te rekenen, daarin z_1 en z_2 in te vullen, en vervolgens gebruik te maken van het feit dat $z_1 z_2 = -d/c$ en $z_1 + z_2 = (a - d)/c$.

We onderscheiden drie gevallen.

1. $|T'(z_1)| \neq |T'(z_2)|$. In dat geval kunnen we z_1, z_2 kiezen zó dat $|T'(z_1)| > 1 > |T'(z_2)|$. We noemen T een *loxodrome* transformatie en z_1 het *afstotende fixpunt* en z_2 het *aantrekkende fixpunt*.
2. $z_1 \neq z_2$ en $|T'(z_1)| = |T'(z_2)| = 1$. In dat geval noemen we T *elliptisch*. Elke Apollonius-cirkel behorend bij z_1, z_2 gaat in zichzelf over.
3. $z_1 = z_2$. We noemen T in dat geval *parabolisch*.

In geval (3) hebben we een tweetal cirkelbundels als volgt



Eén bundel bestaat uit alle cirkels door $z_0 = z_{1,2}$ rakend aan de richting gegeven door het complexe getal $T'(z_0)$, de andere bundel bestaat uit de cirkels loodrecht op de eerste bundel. Voor de cirkels C uit de eerste bundel geldt dat $T(C) = C$.

Strikt genomen hebben we het geval $c = 0$ in bovenstaande classificatie uitgesloten. Dat wil zeggen transformaties van de vorm $z \mapsto az + b$. Concreet, een draaiing plus vergroting gevolgd door een translatie. In ieder geval is ∞ een fixpunt en een tweede wordt gegeven door $z_0 = b/(1 - a)$ als $a \neq 1$.

1. $|a| \neq 1$. Als $|a| > 1$ dan hebben we te maken met een vergroting en z_0 is een afstotend punt. Ook nu noemen we T loxodroom.
2. $|a| = 1, a \neq 1$. We hebben alleen draaiing met verschuiving. Dan gaat elke cirkel met z_0 als middelpunt in zichzelf over. Ook nu noemen we T elliptisch.
3. $a = 1$. We hebben een simpele verschuiving. De rechte lijnen met dezelfde richting als b gaan in zichzelf over. Ook nu noemen we T parabolisch.

OPGAVE 3.5 Teken de cirkelbundels behorend bij het fixpunt $z_0 = b/(1 - a)$ en ∞ als $a \neq 1$ (denk eraan dat rechte lijnen eigenlijk cirkels door ∞ zijn). Teken vervolgens de cirkelbundels (eigenlijk rechte lijnen) behorend bij $a = 1$, dus bij afbeeldingen van de vorm $z \mapsto z + b$ met $b \neq 0$.

4. GROEPEN VAN MÖBIUS-TRANSFORMATIES

In heel veel toepassingen spelen *groepen* een belangrijke rol. Met name voor de meetkunde en getaltheorie zijn ondergroepen van $SL(2, \mathbb{C})$ van cruciaal belang.

DEFINITIE 4.1 Een verzameling $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ heet een groep als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

1. De 2×2 -éénheidsmatrix Id zit in G .
2. Als $g_1, g_2 \in G$ dan ook $g_1 g_2 \in G$.
3. Als $g \in G$, dan ook $g^{-1} \in G$.

Hier volgt een aantal vaak voorkomende ondergroepen.

1. Kies $p, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zó dat $p/q \notin \mathbb{R}$. Definieer G als de groep van matrices $\begin{pmatrix} 1 & mp + nq \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ waarin $m, n \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Dit zijn de verschuivingen in het vlak over alle roosterpunten in het rooster opgespannen door p, q .
2. De groep van afbeeldingen $z \rightarrow az + b$ met $a, b \in \mathbb{C}$ en $|a| = 1$. Dit zijn de conforme afbeeldingen van het vlak die tevens congruenties zijn.
3. De groep van matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ en $ad - bc = 1$. Notatie: $SL(2, \mathbb{Z})$.
4. De groep $SU(2, \mathbb{C})$ uit opgave 2.5. Deze corresponderen precies met de boldraaiingen.

In voorbeelden 2), 4) komen alleen continue parameters voor. Dergelijke groepen noemen we *Lie-groepen*. Wij zullen echter geïnteresseerd zijn in groepen zoals voorbeelden 1), 3) waarin discrete, heeltallige parameters voorkomen.

Beschouw namelijk voorbeeld 1). Daarin komen de translaties

$$T_p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

voor. Het zal duidelijk zijn dat translatie over $mp + nq$ ontstaat door m maal T_p toe te passen en n maal T_q . Als m negatief is, dan passen we natuurlijk $|m|$ maal de inverse van T_p toe. We zeggen dat de groep uit voorbeeld 1) wordt voortgebracht door T_p en T_q . De structuur is in dit geval erg eenvoudig omdat ook geldt $T_p T_q = T_q T_p$, dat wil zeggen, T_p en T_q commuteren. Elk element uit deze groep kan geschreven worden als $T_p^m T_q^n$.

De groep uit voorbeeld 3) staat bekend als de (elliptische) modulaire groep. Deze groep wordt voortgebracht door

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dat wil zeggen, elk element uit $SL(2, \mathbb{Z})$ kan gevormd worden door een geschikte opeenvolging van S, T, S^{-1}, T^{-1} . Belangrijk hierbij is dat, in tegenstelling tot het vorige voorbeeld, S en T *niet commuteren*. Dus TS is wat anders dan ST (Ga na, svp). Wel gelden de relaties $S^2 = -\text{Id}$ en $(TS)^3 = \text{Id}$. Ga dit ook na, svp. Alle andere relaties tussen T, S zijn een gevolg van deze twee. We noteren $t = T^{-1}$ en $s = S^{-1}$ elk element van $SL(2, \mathbb{Z})$ wordt gegeven door de een of andere opeenvolging van symbolen S, T, s, t . Daarbij houden we rekening met de relaties $tT = Tt = \text{Id}$, $sS = Ss = \text{Id}$, $S^2 = -\text{Id}$, $(TS)^3 = \text{Id}$. Bijvoorbeeld, het element $TTstSST$ kunnen we ook schrijven als $-TTstT$ vanwege de relatie $SS = -\text{Id}$. Maar omdat $tT = \text{Id}$ kan $-TTstT$ weer geschreven worden als $-TTs = -T^2s$. We zullen afspreken dat we altijd een zo kort mogelijke schrijfwijze gebruiken.

Groepen zoals (1) en (2) zijn voorbeelden van *discrete groepen*.

DEFINITIE 4.2 Een ondergroep $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ heet discreet, of ook wel een kleinse groep, als voor elke $N > 0$ het aantal $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ met $|a|, |b|, |c|, |d| < N$ eindig is.

In *Indra's Pearls* bekijken de auteurs kleinse groepen die worden voortgebracht door twee verschillende $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$. Door steeds subtielere keuzen voor A, B te nemen, vinden de auteurs steeds spectaculairder kleinse groepen naarmate de hoofdstukken vorderen. In de rest van deze tekst geven we een beknopt overzicht van deze 'Road to Chaos' zoals de auteurs het noemen.

DEFINITIE 4.3 Kies twee elementen $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$. De groep $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ die we krijgen door alle mogelijk producten van A, B en hun inversen te nemen, noemen we de groep voortgebracht door A en B . Notatie: $G = \langle A, B \rangle$.

Gegeven $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ willen we de elementen van de groep voortgebracht door A en B opschrijven. Stel hiertoe $a = A^{-1}, b = B^{-1}$. De groep voortgebracht door A en B is de verzameling matrices die we krijgen als we alle mogelijke producten bestaande uit a, A, b, B nemen. Dus,

$$\text{Id}, a, A, b, B, aa, aA, \dots, BB, aaa, \dots$$

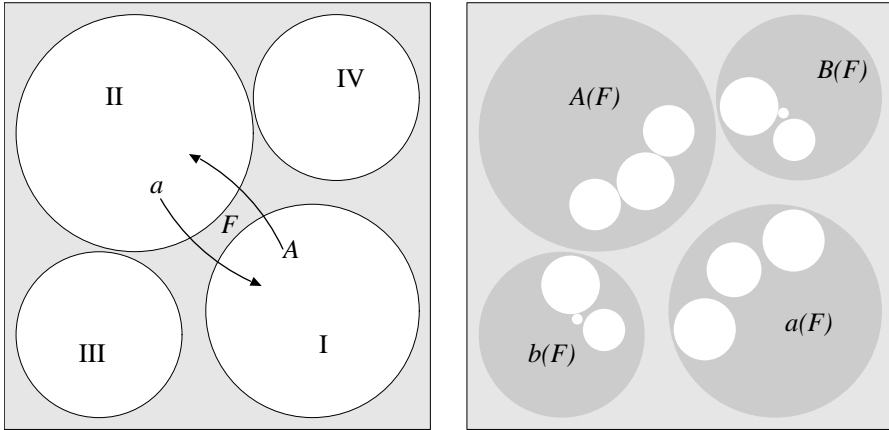
We noemen dit de woorden bestaande uit het alfabet a, A, b, B . Natuurlijk gelden de relaties $aA = Aa = bB = Bb = \text{Id}$. Daarom heeft het weinig zin om in een woord de opeenvolgende letterparen aA, bB etc op te schrijven omdat hun product triviaal is. Bijvoorbeeld het woord $aaABB$ stelt hetzelfde groepselement voor als aBB en we zullen het eerstgenoemde woord voortaan niet eens meer opschrijven. Het is mogelijk dat er tussen de matrices a, A, b, B nog andere realties bestaan dan de triviale $aA = Aa = bB = Bb = \text{Id}$. Het kan bijvoorbeeld gebeuren dat $A^{10} = \text{Id}$. Daarmee geldt tevens dat $a^{10} = \text{Id}$ en bij het opschrijven van onze woorden moeten we daarmee rekening houden.

DEFINITIE 4.4 Als er tussen de matrices a, A, b, B buiten de triviale relaties $aA = Aa = bB = Bb = \text{Id}$ geen andere relaties bestaan, dan zeggen we dat de groep voortgebracht door A, B een vrije groep is.

In wat nu komen gaat, werken we met vrije ondergroepen van $SL(2, \mathbb{C})$ voortgebracht door twee elementen.

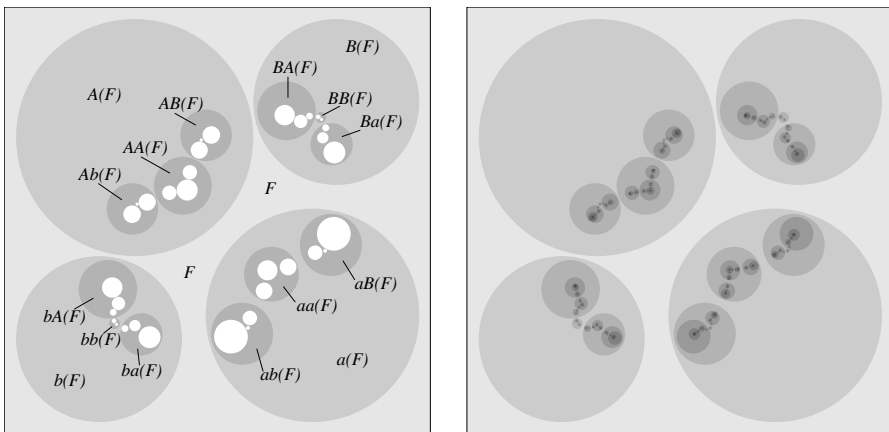
5. PARELS

Laten we een eerste voorbeeld bekijken. Kies vier cirkelschijven I, II, III, IV in het vlak en zij A een loxodrome afbeelding die het buitengebied van I afbeeldt op III, en dus ook het buitengebied van I op III. Voor B kiezen we een loxodrome afbeelding die het buitengebied van II afbeeldt op IV. De inversen a, b doen het tegenovergestelde. De afbeelding a voert het buitengebied van III over in I, b voert het buitengebied van IV over in II. Het complement van $I \cup III \cup II \cup IV$ noemen we F . In de volgende twee plaatjes zien we links de cirkels met het gebied F , en rechts de beelden $A(F), a(F), B(F), b(F)$ van F .



Duidelijk zijn in $A(F)$ de drie gaten te zien corresponderend met de beelden onder A van II, III, IV. Het beeld van I onder A is, zoals gezegd, het buitengebied van cirkel III. Projecteren we dit plaatje terug naar de Riemann-bol dan is het nog iets duidelijker, het beeld $A(F)$ bestaat gewoon uit de Riemann-bol minus vier gaten. Het buitengebied van III is in feite niets anders dan een vierde gat op de Riemann-bol.

Nu nemen we de beelden van F onder de tweeletterwoorden in het alfabet a, A, b, B en voegen deze aan het plaatje linksonder toe. Rechtsonder zien we een plaatje met daarin de beelden van F onder alle groeps-elementen.



Het zal duidelijk zijn dat bijvoorbeeld III bestaat uit $A(F)$ samen met de beelden van II, III, IV onder A . Omdat bijvoorbeeld II het beeld $b(F)$ bevat, geldt voor het beeld $Ab(F)$ dat $Ab(F) \subset A(II) \subset A(I^c) \subset III$. Dus $Ab(F)$ is bevat in III, evenals $AA(F)$ en $AB(F)$. Merk op dat $Aa(F) = F$, maar we zouden de lettercombinatie Aa niet toestaan omdat $Aa = Id$.

Door de schijven in het laatste plaatje een schaduw-effect mee te geven, en een kleur, krijgen we Plaat 1 op bladzijde 73 te zien.

Op Plaat 2 zien we een uitvergroting. In deze plaatjes herkennen we een

verzameling limietpunten die als volgt tot stand komt. Kies een punt $z_0 \in F$ en een oneindig lang woord uit het alfabet a, A, b, B . Bijvoorbeeld $aaBABBa\dots$. Kies aan de hand van dit woord de rij punten $z_0, z_1 = a(z_0), z_2 = aa(z_0), z_3 = aaB(z_0), z_4 = aaBA(z_0), \dots$. Bij elke nieuwe letter maken we eigenlijk een keuze uit de drie kleine gaatjes die we in elk beeld van F tegenkomen. De visuele suggestie is heel sterk dat deze rij naar een punt convergeert en we kunnen aantonen dat dit inderdaad gebeurt. Dit limietgedrag is mooi op Plaat 2 te zien.

Door deze weergave lijken de limietpunten nu een oneindige verzameling parels die als een fijn stof in het complexe vlak liggen. De titel van het boek van Mumford, Series en Wright was hiermee vastgelegd.

De groep die we hierboven hebben geconstrueerd staat bekend als *Schottky-groep* naar de Duits-Poolse wiskundige Schottky (1851–1935). De cirkels I, II, III, IV heten Schottky-cirkels. Er was een heel goede reden waarom deze groepen rond 1900 in de belangstelling stonden. Laten we verzameling van limietpunten aangeven met L . Uit bovenstaande plaatjes is het ook duidelijk dat de Riemann-bol \mathbb{P}^1 minus L wordt opgevuld door beelden van F onder de elementen van onze Schottky-groep G . Dat wil zeggen, bij elk punt $z \in \mathbb{P}^1 - L$ is er een groeps-element $g \in G$ en een punt $z_0 \in F$ zó dat $g(z_0) = z$. We zeggen dat F het *fundamenteaalgebied* is van onze groep G . De randen van F worden door onze groep G als het ware met elkaar geïdentificeerd. Elk punt van de rand van I wordt immers door A afgebeeld naar de rand van III. We kunnen nu in gedachten de cirkelrand I aan cirkelrand III vastplakken en de punten op de rand van II aan die van de rand van IV. Het resultaat is dat F daarmee overgaat in een dubbele torus, in de vorm van een 8-figuur, een bril zonder glazen. Dit oppervlak met twee gaten erft als het ware de complexe structuur van de Riemann-bol. We hebben hiermee een voorbeeld van een compact Riemann-oppervlak gevonden.

Een andere manier om er tegenaan te kijken is de volgende. Het blijkt dat er twee analytische functies $x(z), y(z)$ op $\mathbb{P}^1 - L$ bestaan zó dat $y(g(z)) = y(z)$, $x(g(z)) = x(z)$ voor alle $g \in G$. Bovendien voldoen deze twee functies aan een vergelijking van de vorm

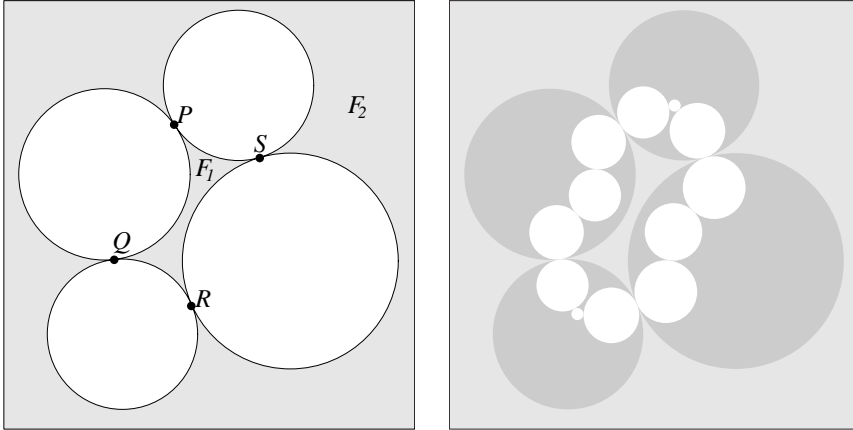
$$y(z)^2 = x(z)^6 + a_5x(z)^5 + \dots + a_1x(z) + a_0.$$

Hiermee hebben we twee analytische functies gevonden die een parametrisatie geven van de algebraïsche kromme $y^2 = x^6 + a_5x^5 + \dots + a_1x + a_0$. Dit is een voorbeeld van uniformisatie van een algebraïsche kromme, één van de meest actuele wiskundige thema's rond 1900. We kennen allemaal de parametrisatie $x(z) = \cos(z), y(z) = \sin(z)$ van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Rond 1900 was men op zoek naar dergelijke parametrisaties voor willekeurige algebraïsche krommen.

Het verband tussen een algebraïsche kromme, zoals $y^2 = x^2 - 1$, en dubbele torus is, dat de verzameling complexe $x, y \in \mathbb{C}$ die voldoen aan $y^2 = x^6 - 1$ er topologisch uit ziet als een dubbele torus.

6. HALSKETTING

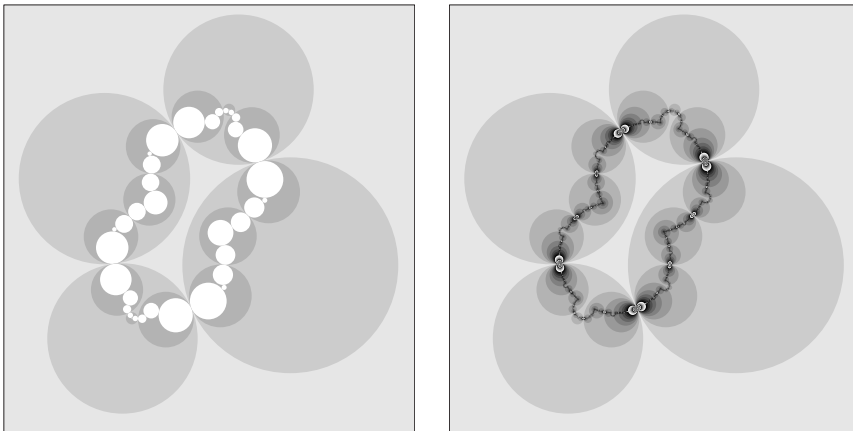
We herhalen ons experiment uit de voorgaande paragraaf, maar nu beginnen we met twee paren schijven waarbij elke schijf de twee uit een ander paar raakt.



Het complement van de vier schijven valt nu in twee stukken uiteen. Het kleine, centrale gebied noemen we F_1 het buitenste stuk F_2 . De vereniging van deze twee noemen we nog steeds F .

We kiezen nu A en B als in de vorige paragraaf, maar met de eis dat $Q = A(R)$, $P = A(S)$ en $P = B(Q)$, $S = B(R)$. Dat wil zeggen, de raakpunten van de cirkels moeten onder A en B op de voor de hand liggende manier in elkaar overgaan. De beelden van F onder a , A , b , B staan in het plaatje rechts afgebeeld.

De beelden van F onder tweeletterwoorden en de beelden onder alle groeps-elementen zijn hieronder afgebeeld.



We zien dat we hier ook limietpunten krijgen, die echter als een ketting aan elkaar geregen worden. De limietpunten lijken een gesloten kromme te vormen. In het binnengebied zien we de beelden van F_1 onder onze groep, in het buitengebied de beelden van F_2 . Ook hier geldt dat een andere kleuring

wonderen kan doen, zoals te zien is op Plaat 3 op bladzijde 74.

De gesloten kromme van limietpunten is hier nog wat duidelijker. Het blijkt dat deze verzameling inderdaad een continue enkelvoudig gesloten (d.w.z. geen zelfdoorsnijdingen) kromme is. We weten uit de stelling van Jordan dat een dergelijke kromme het vlak verdeelt in een binnengebied en een buitengebied. Een close-up van Plaat 3 is te zien als Plaat 4.

Met de schrijvers van *Indra's Pearls* kunnen we er ook poëtischer tegenaan kijken. Het lijkt alsof de parels uit de vorige paragraaf zich hebben aaneenge-regen tot een halsketting: *Indra's necklace*.

7. TECHNISCHE ACHTERGROND

Doordat in de vorige paragraaf de Schottky-cirkels aan elkaar raakten, heeft de limietverzameling een flinke verandering ondergaan. De reden van deze overgang kunnen we ook aan de groeps-elementen zelf zien, niet alleen de cirkels waarmee we beginnen. Daartoe moeten we ons iets meer bezighouden met de matrixelementen van A en B . Over de expliciete van deze matrices hebben we het in de voorgaande twee voorbeelden nog helemaal niet gehad.

Stel $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. We weten, volgens afspraak, al dat $\det(A) = ad - bc = 1$, de determinant van A is dus 1. Een andere belangrijke grootte behorend bij A is het *spoor* (*trace* in het Engels) van A gedefinieerd door $a + d$. Notatie $\text{Tr}(A) = a + d$. Spoor en determinant van een 2×2 -matrix hebben de belangrijke eigenschap dat ze conjugatie invariant zijn. Dat wil zeggen, voor elke inverteerbare 2×2 -matrix S en elke 2×2 -matrix A geldt dat

$$\det(SAS^{-1}) = \det(A) \quad \text{Tr}(SAS^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

OPGAVE 7.1 *Zij A, B een tweetal 2×2 -matrices. Laat zien dat $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. We kunnen vervolgens concluderen dat*

$$\text{Tr}(SAS^{-1}) = \text{Tr}(AS^{-1}S) = \text{Tr}(A).$$

Het begrip conjugatie heeft een aantal belangrijke eigenschappen. Zij S een inverteerbare 2×2 -matrix. Als M een 2×2 -matrix is, dan geven we de geconjugeerde SMS^{-1} aan met M' . Zij nu $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ en beschouw de groep G voortgebracht door A, B . Stel $a = A^{-1}, b = B^{-1}$. De geconjugeerden van a, b geven we, zoals daarnet gezegd, aan met a', b' .

OPGAVE 7.2 *Toon de volgende eigenschappen aan.*

1. $a'A' = \text{Id}, b'B' = \text{Id}$.
2. *De geconjugeerde van elk woord in a, A, b, B is gelijk aan het overeenkomstige woord in a', A', b', B' . Dus bijvoorbeeld $(aBAA)' = a'B'A'A'$.*

Uit deze opgave zien we dat conjugatie van alle elementen van G met dezelfde S weliswaar een andere groep geeft, maar dat de abstracte structuur van de groep hetzelfde blijft. De matrices van de voortbrengers A, B zelf zijn expliciete realisaties van onze groep. Ze ontstaan doordat we op de Riemann-bol

een coördinaat z gekozen hebben, en de transformatiematrices van A, B eigenlijk de transformaties van de z -coördinaat onder A, B weergeven. Niets houdt ons echter tegen om een andere coördinaat z' op de Riemann-bol te nemen en de groep ten opzichte van z' te bekijken. Stel dat het verband tussen z' en z gegeven wordt door $z' = S(z)$. Stel dat een Möbius-transformatie T ten opzichte van z de matrix A heeft. Dan wordt de matrix van T ten opzichte van z' gegeven door SAS^{-1} . Toepassing van S^{-1} is de transformatie van z' -coördinaat naar de z -coördinaat. Toepassing van A geeft de Möbius-transformatie en tot slot transformeert S de z -coördinaat van het beeld naar de z' -coördinaat. Conjugaties van alle groeps-elementen met dezelfde S kunnen dus gezien worden als coördinatentransformaties op de Riemann-bol. Het is daarom geen wonder dat conjugatie de groepsstructuur intact laat.

We geven nu zonder bewijs een aantal Stellingen.

STELLING 7.3 *Stel we hebben twee Möbius-transformaties met matrices $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$. Dan hebben de transformaties een gemeenschappelijk fixpunt precies dan als $\text{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = 2$.*

Voor degenen die deze stelling willen bewijzen, geven we hier wat hints. Er moeten twee dingen gebeuren. Stel eerst dat A, B een gemeenschappelijk fixpunt hebben. Door conjugatie (coördinaatverandering) mogen we aannemen dat ∞ dat fixpunt is. Maar dan hebben zowel A als B de vorm $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Controle van de spoorrelatie is dan niet moeilijk meer.

Maar stel nu dat de spoorrelatie geldt, we moeten laten zien dat er een gemeenschappelijk fixpunt is. Door conjugatie mogen we aannemen dat A van de vorm $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ is of $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kies $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Reken dan na dat $\text{Tr}(ABA^{-1}B^{-1})$ gelijk is aan $2 - (k - 1/k)^2 bc$ in het eerste geval en $2 + c^2$ in het tweede geval. Maak nu het bewijs af.

Als g, h elementen van een groep zijn, dan noemen we $ghg^{-1}h^{-1}$ de *commutator* van g en h . De commutator van A, B speelt dus een belangrijke rol in bovestaande stelling.

De volgende relatie tussen sporen kost veel rekenwerk. Hij staat bekend als de *Fricke-relatie*, maar het is niet duidelijk wie hem als eerste vond.

STELLING 7.4 *Stel $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$. Dan geldt*

$$\text{Tr}(A)^2 + \text{Tr}(B)^2 + \text{Tr}(AB)^2 - \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(AB) = 2 + \text{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}).$$

STELLING 7.5 *Stel $x, y, z \in \mathbb{C}$ zó dat $x^2 + y^2 + z^2 - xyz \neq 4$. dan zijn er $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ zó dat $\text{Tr}(A) = x, \text{Tr}(B) = y, \text{Tr}(AB) = z$. Bovendien zijn A, B , op gemeenschappelijke conjugatie na, uniek bepaald.*

Het zal duidelijk zijn dat de conditie op x, y, z er is om te vermijden dat A, B een gemeenschappelijk fixpunt hebben. In dat geval zou namelijk de uniciteit van A, B niet gelden. Bijvoorbeeld, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

zijn voortbrengers van de translatiegroep over het rooster opgespannen door $1, p$. Hun gemeenschappelijke fixpunt is ∞ . Er geldt dat $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = \text{Tr}(AB) = 2$, maar voor verschillende p zijn de groepen niet geconjugeerd.

Stelling 7.5 laat zien dat een ondergroep van $SL(2, \mathbb{C})$ voortgebracht door twee elementen A, B is vastgelegd door de waarden van $\text{Tr}(A), \text{Tr}(B), \text{Tr}(AB)$ te geven. De ruimte van getallen $x, y, z \in \mathbb{C}$ met de voorwaarde $x^2 + y^2 + z^2 - xyz \neq 4$ is daarmee een parameterruimte voor dergelijke groepen. Ook kunnen we nu volstaan met het aangeven van de drie sporen als we de groep $\langle A, B \rangle$ willen aangeven. We hoeven niet meer de matrices van A, B expliciet op te schrijven.

8. TORUSGROEPEN MET EEN GAATJE

Laten we even teruggaan naar Paragraaf 6 en het eerste plaatje van de rakende Schottky-cirkels. De commutator van A, B is $ABab$. Merk nu op dat

$$ABab : P \mapsto Q \mapsto R \mapsto S \mapsto P.$$

Dus P is fixpunt van $ABab$. Bovendien kunnen we nagaan dat $ABab$ de cirkel IV afbeeldt naar een cirkel die IV in P raakt. Dit kan alleen als $ABab$ een parabolisch element is, dat wil zeggen $\text{Tr}(ABab) = \pm 2$. Omdat A, B geen gemeenschappelijke fixpunten hebben, moet gelden dat $\text{Tr}ABab = -2$.

Discrete groepen $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ voortgebracht door twee elementen A, B waarvan de commutator parabolisch is, vormen een belangrijke klasse. We noemen ze ook wel (gepuncteerd) torusgroepen. De reden hiervoor is simpel. Het gebied F_1 uit Paragraaf 6 is een vierhoek met cirkelbogen als zijden. De hoekpunten van deze vierhoek bevinden zich in de verzameling limietpunten, en we rekenen ze niet tot F_1 . De elementen A en B identificeren de tegenover elkaar gelegen zijden van de vierhoek. Als we de overstaande zijden van een vierhoek aan elkaar plakken krijgen we een torus (autoband). De vier hoekpunten worden tot één punt geïdentificeerd. Maar omdat we deze uit F_1 hebben weggelaten, krijgt onze torus een gaatje. We hebben nu een gepuncteerde torus.

Uit de spoorrelatie van Fricke (Stelling 7.4) volgt voor dit soort groepen dat

$$\text{Tr}(A)^2 + \text{Tr}(B)^2 + \text{Tr}(AB)^2 - \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(AB) = 0.$$

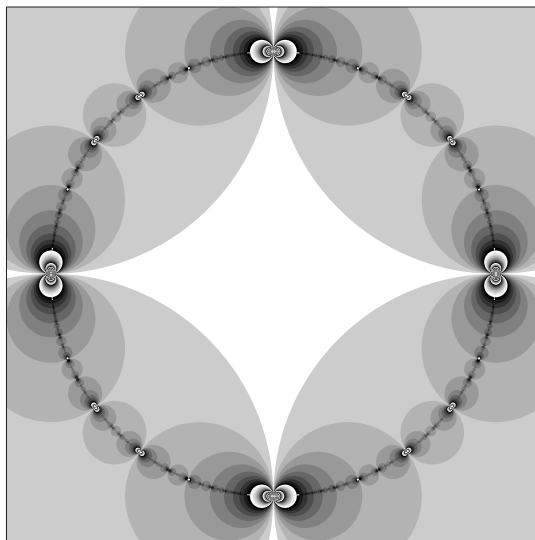
Als we de waarden van $\text{Tr}(A), \text{Tr}(B)$ voor een torusgroep geven, dan volgt uit bovenstaande relatie de waarde van $\text{Tr}(AB)$ en daarmee ligt volgens Stelling 7.5 de groep op conjugatie na vast.

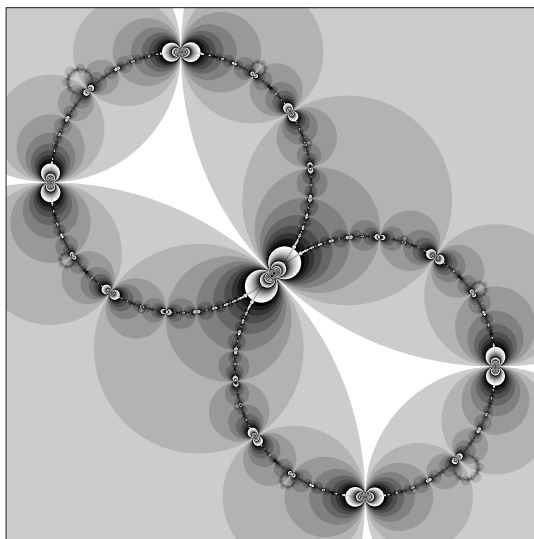
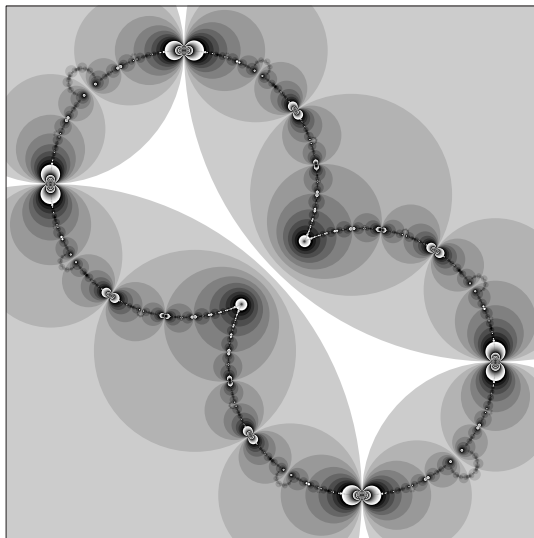
OPGAVE 8.1 *Stel we hebben een gepuncteerde torusgroep voortgebracht door A en B . Stel $t_A = \text{Tr}(A), t_B = \text{Tr}(B)$. De vergelijking $x^2 - t_A t_B x + t_A^2 + t_B^2 = 0$ heeft over het algemeen twee oplossingen. Laat zien dat deze oplossingen worden gegeven door $x = \text{Tr}(AB)$ en $x = \text{Tr}(AB^{-1})$. Hint: maak gebruik van het feit dat $\text{Tr}(g) = \text{Tr}(g^{-1})$ voor elke $g \in SL(2, \mathbb{C})$.*

In de meeste plaatjes die we nu laten zien, zullen we geen Schottky-cirkels meer tekenen, in veel voorbeelden bestaan die ook niet eens. In plaats daarvan

kenschetsen we onze groepen door de sporen $t_A = \text{Tr}(A), t_B = \text{Tr}(B)$ te geven. Vervolgens berekenen we twee matrices die daarbij horen. Omdat we nog altijd conjugatievrijheid hebben, zijn er vele manieren om deze matrices op te schrijven. In *Indra's Pearls* worden 'grandma's recipe' (waarschijnlijk door de auteurs bedacht) gegeven, een methode van Maskit en die van Jørgensen. De eerste leveren de mooiste plaatjes op, de laatste is het makkelijkst op te schrijven. In de volgende plaatjes gebruiken we 'grandma's recipe' (zie het boek voor details).

Hier volgt voor diverse keuzen van $t_A = \text{Tr}(A), t_B = \text{Tr}(B)$ een plaatje van de limietverzameling van de gepuncteerde torusgroep (dus $\text{Tr}(ABab) = -2$) samen met de beelden van de bijbehorende Schottky-cirkels. In alle voorbeelden zijn de limietverzamelingen continue krommen die zichzelf in (eventuele) parabolische fixpunten snijden.





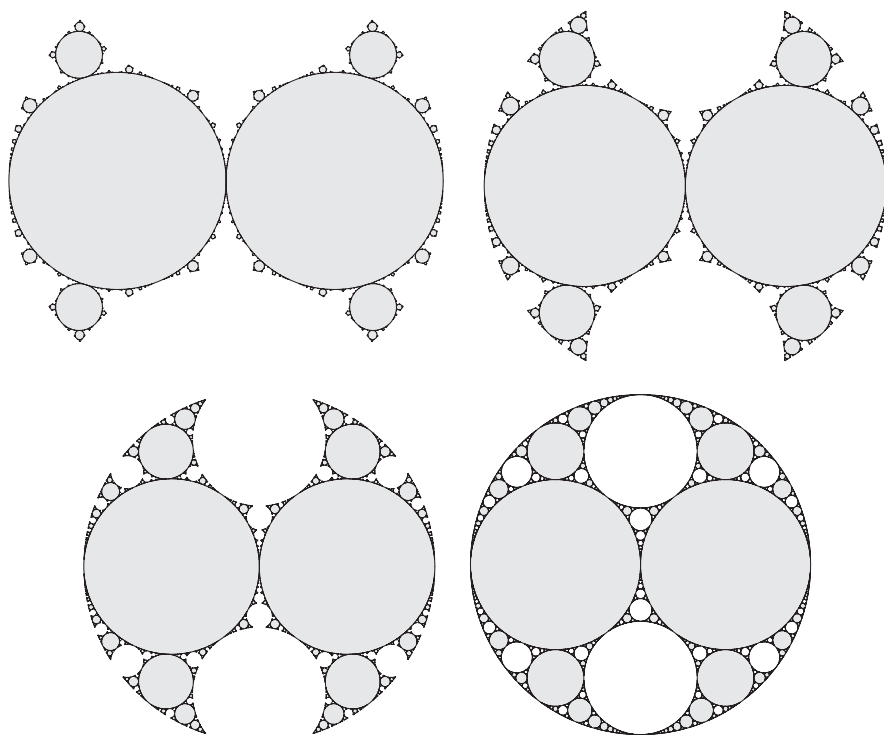
In deze serie hebben we $t_A = 3$ gehouden en t_B van 3 naar 2 laten dalen. Omdat $t_B = 2$ in het laatste plaatje, is B een parabolisch element geworden. Het effect hiervan is zichtbaar, twee tongen (cusps) in de limietverzameling raken elkaar in een punt, dat het fixpunt van B blijkt te zijn.

9. SPELEN MET GROEPEN

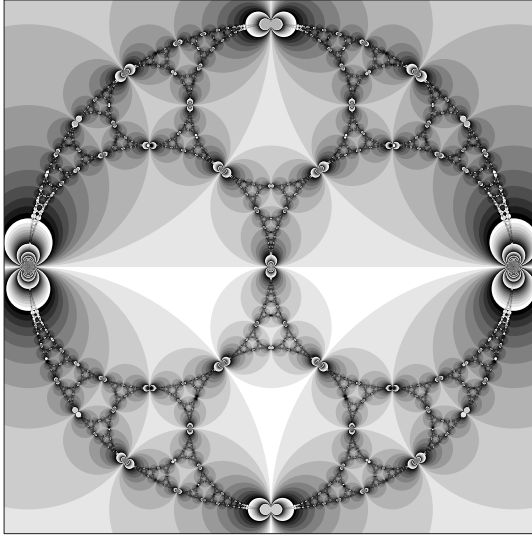
We kijken in deze paragraaf nog steeds naar gepuncteerde torusgroepen met $\text{Tr}(ABab) = -2$. Aan het eind van de vorige paragraaf hebben we het spoor t_B laten veranderen terwijl we $t_A = 3$ vasthielden. Dit was slechts een eerste experiment. De mogelijkheden zijn nu legio, we kunnen t_A en t_B elke waarde

geven die we willen, zelfs complexe waarden. Om nu niet in een ongecontroleerde chaos terecht te komen, is het verstandig de keuze van t_A, t_B op een verstandige manier te beperken en wel zodanig dat we ook nog iets over de groepen leren. Dit is precies wat in *Indra's Pearls* wordt gedaan. Een heel belangrijke vraag is voor welke t_A, t_B de bijbehorende groep discreet is, en voor welke waarden niet. Laten we, om nog wat beter de gedachten te bepalen, t_B gelijk aan 2 nemen. De vraag is nu voor welke waarden van t_A de bijbehorende groep discreet is. In het bijzonder heeft de scheidingsgrens tussen discrete en niet-discrete waarden van t_A de bijzondere aandacht van veel onderzoekers en ook de schrijvers van *Indra's Pearls*.

Als eerste laten we t_B van 3 naar 2 dalen, terwijl we $t_A = 2$ houden. We zullen nu geen Schottky-cirkels meer tekenen. Voor complexe t_A, t_B bestaan die niet eens meer. We geven in het vervolg wel de limietverzameling aan, een gesloten kromme, en het binnengebied en buitengebied in grijs respectievelijk wit.

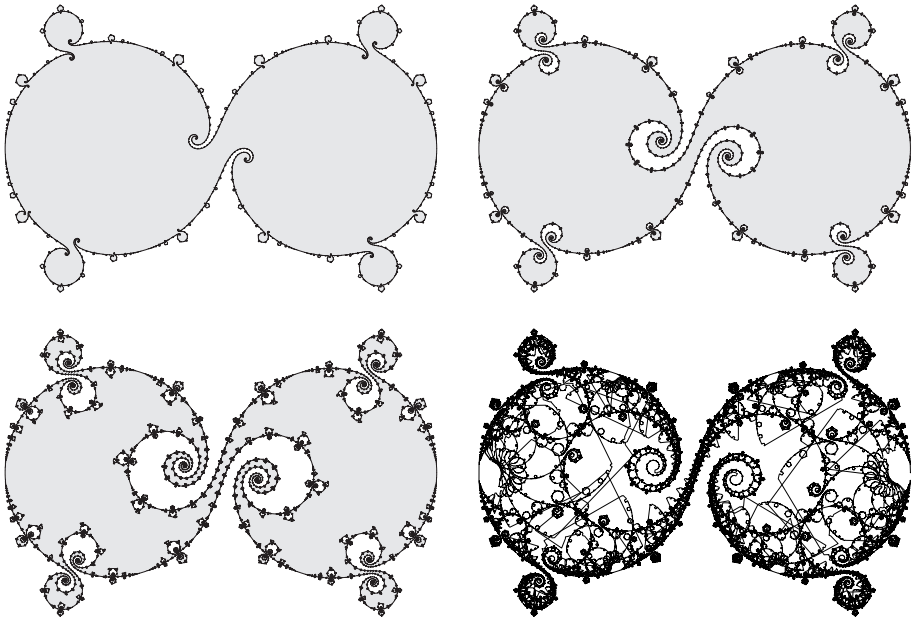


Het laatste plaatje is verrassend. Er zijn nu nog eens twee tongen aan elkaar gesloten, hetgeen een gevolg is van het feit dat A nu een parabolisch element is geworden. Immers, $t_A = 2$. Op het thema van het ontstaan van parabolische elementen komen we aan het eind nog terug. Hieronder is het plaatje met daarin de beelden van de Schottky-cirkels. Beter gezegd, één van de Schottky-cirkels is nu het halfvlak $y \geq 0$, de twee grootste schijven links- en rechtsonder zijn Schottky-cirkels, evenals de schijf ingeklemd tussen deze drie.



Deze figuur wordt door de auteurs het *net van Apollonius* genoemd (*Apollonian gasket* in het Engels). Door de kleuring te kiezen net zoals we voor Plaat 3 deden, krijgen we nu de fraaie figuur van Plaat 5 op bladzijde 75.

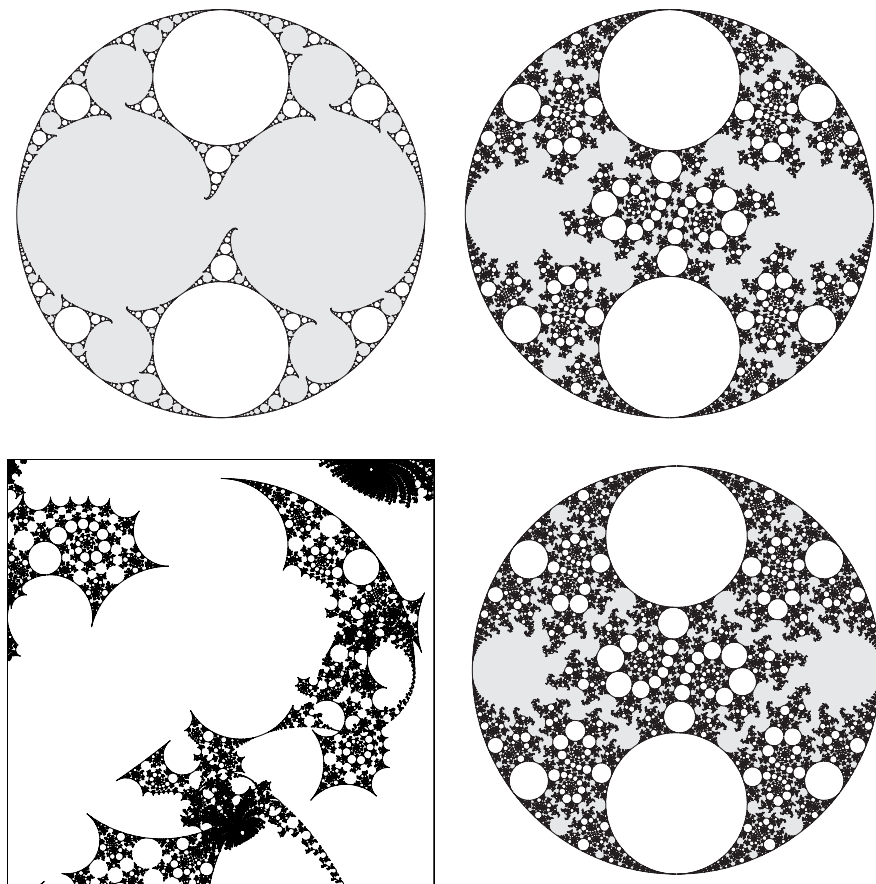
Laten we eerst een paar voorbeelden bekijken met complexe t_A . Hier zijn de limietverzamelingen van een aantal keuzen. We houden $t_B = 3$ en kiezen voor t_A achtereenvolgens $1.98 + 0.02i$, $1.96 + 0.02i$, $1.95 + 0.02i$, $1.94 + 0.02i$.



Het laatste plaatje ziet er rommelig uit. Als we het tekenprogramma verder

hadden laten gaan, dan zou uiteindelijk het hele vlak zwart gekleurd worden. We hebben hier te maken met een niet-discrete groep.

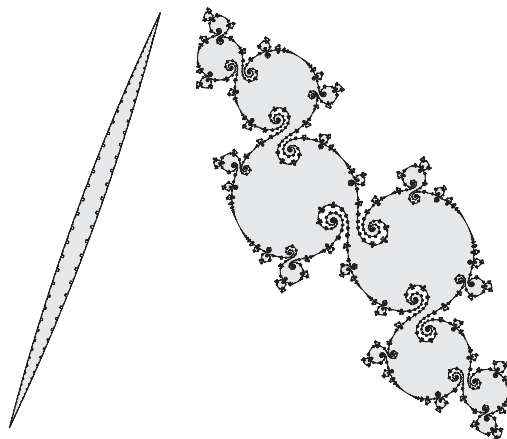
Hier is een serie van vier plaatjes die laten zien hoe subtiel de grens tussen discreet en niet-discreet is. Hierin is $t_B = 2$ en t_A achtereenvolgens $2.0 + 0.05i$, $1.889 + 0.05i$, $1.888 + 0.05i$, $1.887 + 0.05i$.



Bij de waarden $t_A = 2.0 + 0.05i$, $1.889 + 0.05i$, $1.887 + 0.05i$ zien we een limietverzameling die wijzen op een discrete groep. Bij $t_A = 1.888 + 0.05i$ zien we een figuur waaraan niet al te veel waarde moet worden gehecht. De groep is nu niet-discreet en het programma weet eenvoudig gezegd niet hoe het de limietverzameling moet tekenen. Merk trouwens wel op hoe ingrijpend de limietverzamelingen veranderen bij heel kleine variaties van de parameters!

Het grensgebied van de ruimte van t_A, t_B -waarden waar de groep discreet en waar de groep niet-discreet is, wordt wel de *Maskit-rand* genoemd.

Er is een zee van mogelijkheden voor t_A, t_B en vooral als deze waarden in de buurt van de Maskit-rand komen, levert dit soms wonderlijke plaatjes op. Hier zijn twee ‘vissen’ die in deze zee door experimenteren gevonden zijn.



Het is mogelijk om waarden van t_A, t_B aan te geven, die precies op deze Maskit-rand liggen. Dit gebeurt als $t_B = 2$ en t_A wordt zó gekozen dat bepaalde elementen uit de groep parabolisch worden. In Plaat 6 op bladzijde 75 is t_A zó gekozen, dat het element $a^{10}B$ parabolisch is. In Plaat 7 op bladzijde 76 is t_A zó gekozen dat het element $aaaBaaB$ parabolisch is.

Het zou in deze tekst te ver voeren om op al deze keuzen verder in te gaan. Ook is het mogelijk om groepen op de Maskit-rand te vinden, die tussen dit soort keuzen in liggen. De limietverzameling wordt nu een vlakvullende kromme. Hiermee zijn we aan het begin gekomen van een boeiende zoektocht, waar groepentheorie en hyperbolische meetkunde samenkomen. Nog steeds is dit gebied het onderwerp van intensief onderzoek en worden er regelmatig nieuwe resultaten geboekt. Voor ons betekent het echter het einde van onze inleiding. De lezer die meer wil weten, kunnen we zeker *Indra's Pearls* aanraden, hoewel de latere hoofdstukken best lastig worden. Ook raden we iedereen een blik op David Wright's website klein.math.okstate.edu aan. Verder is het omwerken van fractals tot *Fractal Art* een enorme industrie geworden, waarvan op internet talloze voorbeelden te vinden zijn. Typ gewoon 'fractal art' of 'fractal landscape' in op www.google.com Ook voor kleinse ondergroepen wordt dergelijke kunst bedreven, zie bijvoorbeeld www.josleys.com/creatures42.htm.

Ten slotte, we hebben het alleen over groepen met twee voortbrengers gehad. Niets houdt ons tegen om ook groepen met drie voortbrengers te bekijken. We besluiten dit verhaal met Plaat 8 op bladzijde 76, een kleurvariant op het plaatje van de voorkant van *Indra's Pearls*, voorstellende de parels die we krijgen bij een groep met drie voortbrengers.

Dimensie 5 in zicht

H. Finkelberg

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

e-mail: hfinkel@math.leidenuniv.nl

1. INLEIDING

Dit verhaal is een ‘sight-seeing-tour’ door projectieve ruimtes waarbij we regelmatig heen en weer zullen springen tussen dimensie 3 en 5. Met het oog op de leesbaarheid zijn sommige formuleringen wat ‘wolliger’ dan strikt noodzakelijk en worden niet veel uitspraken echt bewezen. De lezer en toehoorder wordt echter van harte uitgenodigd ontbrekende bewijzen zelf te leveren. Veel plezier!

2. DE PROJECTIEVE RUIMTE \mathbb{P}^n

De projectieve ruimte \mathbb{P}^n is in wezen niets anders dan de \mathbb{R}^n of \mathbb{C}^n (al naar gelang men over \mathbb{R} of \mathbb{C} werkt) voorzien van punten op oneindig. Hierbij is de verzameling van punten op oneindig zelf altijd weer een \mathbb{P}^{n-1} . Voorbeelden zijn (we noteren even K voor \mathbb{R} of \mathbb{C}):

- \mathbb{P}^0 : Dit is niets anders dan één punt.
- \mathbb{P}^1 : Dit is K met daaraan dus toegevoegd één punt (\mathbb{P}^0) op oneindig. Dit is topologisch een S^1 (een cirkel) als $K = \mathbb{R}$ en een S^2 (een boloppervlak: de Riemannsfeer) als $K = \mathbb{C}$.
- \mathbb{P}^2 : Dit is K^2 met daaraan een \mathbb{P}^1 op oneindig toegevoegd. In het reële geval is dit nog goed voor te stellen. De \mathbb{P}^1 op oneindig is in dat geval niets anders dan de horizon waarbij antipodale punten met elkaar geïdentificeerd worden. In het complexe geval is hier wat moeilijker een voorstelling van te maken.

\mathbb{P}^n is te voorzien van een bijzonder soort coördinaten: *homogene coördinaten*. Dit komt erop neer dat ieder punt P voorzien wordt van een *verhouding* van $n + 1$ getallen in K :

$$P = (p_0 : p_1 : \cdots : p_n)$$

Voor homogene coördinaten geldt:

$$(p_0 : p_1 : \cdots : p_n) = (q_0 : q_1 : \cdots : q_n) \Leftrightarrow \exists \lambda_{\neq 0} \in K : p_i = \lambda q_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

In de \mathbb{P}^n bestaan net als in de K^n lijnen, vlakken en dergelijke, maar hier met veel mooiere intersectie-eigenschappen dan in de K^n . In de projectieve ruimte

bestaat namelijk geen evenwijdigheid. Het is natuurlijk wel mogelijk dat twee lineaire deelruimten elkaar niet snijden, maar dan is dat nooit omdat er sprake zou zijn van een vorm van evenwijdigheid, maar omdat de dimensies van de deelruimten te klein zijn. Bijvoorbeeld twee lijnen in de K^3 die elkaar niet snijden, kunnen evenwijdig zijn in de K^3 of echt verschillende richtingen hebben en elkaar gewoon missen in de 3-dimensionale ruimte. Deze biedt immers door zijn dimensie letterlijk en figuurlijk de ruimte hiertoe. In het tweede geval zullen de lijnen elkaar ook niet snijden in de \mathbb{P}^3 , maar er is ook geen sprake van evenwijdigheid. In het eerste geval snijden de lijnen elkaar juist wél in de \mathbb{P}^3 , omdat deze juist de punten op oneindig bevat. In de \mathbb{P}^n blijken twee lineaire deelruimten *in algemene positie* van dimensie l en m (in wezen betreft het dan niets anders dan een lineair ingebedde \mathbb{P}^l en \mathbb{P}^m) elkaar te snijden in een \mathbb{P}^{l+m-n} als $l + m \geq n$. Als $l + m < n$ is de doorsnijding leeg.

3. GRASSMANN-VARIËTEITEN

DEFINITIE 1 *De verzameling van lineaire deelruimten van dimensie k in \mathbb{P}^n wordt de Grassmann-variëteit $G(k, n)$ genoemd.*

VOORBEELD 1 $G(0, n) = \mathbb{P}^n$: *vanzelfsprekend.*

VOORBEELD 2 $G(1, 2) = \mathbb{P}^2$: *helemaal niet zo vanzelfsprekend. We zullen dit in de volgende paragraaf bestuderen als aanloopje naar $G(1, 3)$.*

VOORBEELD 3 $G(1, 3) = \dots$. *Dit is het hoofdonderwerp van dit verhaal. Hier gaan we uitgebreid naar kijken.*

4. DE GRASSMANN-VARIËTEITEN $G(1, 2)$ EN $G(1, 3)$

4.1. $G(1, 2)$

Het beschrijven van een lijn in \mathbb{P}^n is heel eenvoudig. Zij $P = (p_0 : p_1 : \dots : p_n)$ en $Q = (q_0 : q_1 : \dots : q_n)$ twee verschillende punten in \mathbb{P}^n . De lijn PQ is dan:

$$PQ = \{(\lambda p_0 + \mu q_0 : \lambda p_1 + \mu q_1 : \dots : \lambda p_n + \mu q_n) \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}.$$

De oplettende lezer merkt natuurlijk direct op, dat hier in wezen over niets anders gesproken wordt dan het opspansel van twee onafhankelijke vectoren in de K^3 . Met behulp van K^{n+1} kan \mathbb{P}^n als volgt worden gedefinieerd:

DEFINITIE 2 \mathbb{P}^n *is de verzameling van lineaire deelruimten van dimensie 1 van de vectorruimte K^{n+1} over K .*

Een lijn (een projectieve lijn dus!) in de \mathbb{P}^n is niets anders dan een lijnenwaaier in K^{n+1} . Een lijnenwaaier in een vectorruimte is de verzameling van ééndimensionale deelruimten bevat in een gegeven tweedimensionale deelruimte. Nu is ook duidelijk waar de homogene coördinaten vandaan komen. Een punt $P \in \mathbb{P}^n$ is immers niets anders dan een lijn door de oorsprong in K^{n+1} en wordt dus bepaald door een basisvector (met $n + 1$ coördinaten) *modulo scalaire vermenigvuldiging met een factor $\lambda \neq 0$.*

Om zicht te krijgen op $G(1, 2)$ en $G(1, 3)$ stellen we ons nu de vraag hoe we aan twee tweetallen punten kunnen zien of ze dezelfde lijn in \mathbb{P}^2 of \mathbb{P}^3 opspannen. Het antwoord wordt geleverd door de lineaire algebra:

STELLING 1 *Twee stelsels vectoren $\{v, w\}$ en $\{\tilde{v}, \tilde{w}\}$ in K^3 hebben hetzelfde opspannel precies dan als de verhouding tussen de hierbij optredende minoren hetzelfde is:*

$$\begin{aligned} \text{span} \left[\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] &= \text{span} \left[\begin{pmatrix} \tilde{v}_0 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{pmatrix} \right] \\ &\Leftrightarrow \\ \left(\left| \begin{array}{cc|cc} v_0 & w_0 & v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 & v_1 & w_1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc|cc} v_0 & w_0 & v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 & v_2 & w_2 \end{array} \right| \right) &= \\ \left(\left| \begin{array}{cc|cc} \tilde{v}_0 & \tilde{w}_0 & \tilde{v}_0 & \tilde{w}_0 \\ \tilde{v}_1 & \tilde{w}_1 & \tilde{v}_1 & \tilde{w}_1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc|cc} \tilde{v}_0 & \tilde{w}_0 & \tilde{v}_1 & \tilde{w}_1 \\ \tilde{v}_2 & \tilde{w}_2 & \tilde{v}_2 & \tilde{w}_2 \end{array} \right| \right) & \end{aligned}$$

Hierin kunnen trouwens niet alle minoren gelijk zijn aan 0, omdat in dat geval het stelsel vectoren niet onafhankelijk is en dus geen vlak in de K^3 opspannt. We zien dus van nature weer homogene coördinaten tevoorschijn komen bij het beschrijven van de elementen van $G(1, 2)$. Het is eenvoudig na te gaan dat deze afbeelding van $G(1, 2)$ naar \mathbb{P}^2 goed gedefinieerd is en tevens bijectief is. Door op te merken dat in het reële geval met de 3 minoren in wezen het uitwendig product in \mathbb{R}^3 wordt beschreven is visueel in te zien dat op deze manier met iedere lijn in \mathbb{P}^2 , dat dus ‘rust’ op een vlak V in \mathbb{R}^3 , op één-éénduidige wijze een punt in \mathbb{P}^2 correspondeert, dat ‘rust’ op het orthoplement van het vlak V in \mathbb{R}^3 .

Hiermee zien we dus in dat $G(1, 2)$ zelf weer de structuur draagt van een \mathbb{P}^2 . Deze laatste \mathbb{P}^2 wordt ook wel de *duale* van \mathbb{P}^2 genoemd. Een leuke observatie is de volgende. Lijnen in \mathbb{P}^2 corresponderen met punten in de duale \mathbb{P}^2 . De lijnen in \mathbb{P}^2 echter die door een vast punt gaan (een lijnenwaaier) blijken te corresponderen met de punten in de duale die op een rechte liggen. Dit inzicht is verder uit te breiden tot het *dualiteitsprincipe*: met ieder punt in \mathbb{P}^2 correspondeert een lijn in zijn duale en met iedere lijn een punt en wel zodanig dat *incidentie wordt behouden*. Dit laatste wil zeggen dat ‘een punt op een lijn’ in \mathbb{P}^2 correspondeert met ‘een lijn door een punt’ in de duale en ‘een lijn door een punt’ in \mathbb{P}^2 correspondeert met ‘een punt op een lijn’ in de duale. Een bekend gevolg hiervan is dat stellingen die een uitspraak doen over punten, lijnen, snijden, verbinden en dergelijke gedualiseerd kunnen worden door overal in de stelling ‘punt’ te vervangen door ‘lijn’, ‘door één punt’ te vervangen door ‘op één lijn’ enzovoort.

4.2. $G(1, 3)$

Bij $G(1, 2)$ hebben we gezien dat we een afbeelding

$$i : G(1, 2) \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

kunnen maken die in ieder geval injectief, maar in dit geval zelfs ook surjectief is. Dezelfde afbeelding kan je ook maken in het algemene geval $G(k, n)$. Deze afbeelding blijkt altijd injectief te zijn en wordt de *Plücker-inbedding* genoemd. Voor het geval $k = 1$ en $n = 3$ ziet de Plücker-inbedding er als volgt uit:

$$i : G(1, 3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$i : \left[\left(\begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \right) \right] \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc|c|cc|c|cc|c|cc} v_0 & w_0 & : & v_0 & w_0 & : & v_0 & w_0 & : & v_1 & w_1 & : & v_1 & w_1 & : & v_2 & w_2 & : & v_2 & w_2 & : & v_3 & w_3 & : & v_3 & w_3 & : & v_3 & w_3 & : & v_3 & w_3 \end{array} \right)$$

Het beeld van deze inbedding is een hyperoppervlak van graad 2, gegeven door de vergelijking:

$$x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 = 0.$$

Het feit dat het beeld van $G(1, 3)$ ‘voldoet’ aan deze vergelijking zegt nog niet, dat $G(1, 3)$ *gelijk* is aan deze kwadriek. Misschien is $G(1, 3)$ wel een deelvariëteit van deze kwadriek met een lagere dimensie dan 4. Het is echter niet moeilijk in te zien, dat de dimensie van $G(1, 3)$ gelijk is aan 4. Een lijn in \mathbb{P}^3 wordt vastgelegd door een tweetal punten. Ieder van deze twee punten kan worden bewogen, waardoor er (vaak) een andere lijn wordt opgespannen. Door te redeneren dat je voor ieder punt drie vrijheidsgraden hebt en dus de dimensie van $G(1, 3)$ gelijk zou zijn aan $3 + 3 = 6$ is echter onjuist. Alleen een beweging van elk der steunpunten *van de lijn af*, dus niet in de richting van de lijn, levert echt een andere lijn op. Zo zien we dat de dimensie van $G(1, 4)$ gelijk is aan $2 + 2 = 4$.

Het blijkt dus dat de elementen van de Grassmann-variëteit van lijnen in \mathbb{P}^3 geïdentificeerd kunnen worden met de punten van een (gladde, niet singuliere) kwadriek in \mathbb{P}^5 .

5. DE LIJNEN OP $G(1, 3)$

Het is eenvoudig na te rekenen dat een lijnenwaaier in \mathbb{P}^3 door de Plücker-inbedding wordt afgebeeld op een lijn op de Grassmannvariëteit in \mathbb{P}^5 . A priori zou het mogelijk zijn, dat er nog meer lijnen op $G(1, 3)$ liggen die *niet* van een lijnenwaaier afkomstig zijn. Dit is echter niet het geval. Het inzicht dat de enige lijnen op $G(1, 3)$ afkomstig zijn van lijnenwaaiers levert ook zicht op de vlakken op $G(1, 3)$.

6. DE VLAKKEN OP $G(1, 3)$

Hierboven hebben we op twee manieren een projectief vlak zien ontstaan: als verzameling lijnen door een punt in een driedimensionale (vector-)ruimte en als de duale van een gegeven projectief vlak. Beide situaties komen in de \mathbb{P}^3 voor en leveren inderdaad vlakken op in $G(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$:

- Zij $P \in \mathbb{P}^3$ en zij $V_P \subset G(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ de verzameling van lijnen door P . V_P is een vlak in \mathbb{P}^5 . Op zich niet triviaal. Een kegelsnede in het projectieve vlak is immers een ‘kwadratisch ingebedde’ projectieve lijn. Zo kan \mathbb{P}^2 ook kwadratisch worden ingebed in \mathbb{P}^5 , maar dat is hier niet het geval. Immers, bij ieder tweetal lijnen in \mathbb{P}^3 door P vinden we dat de door deze twee lijnen opgespannen lijnenwaaier (de verbindingslijn op $G(1, 3)$ óók in V_P ligt. Dit kan alleen als V_P een lijn of een vlak is, en een lijn is het zeker niet.
- Zij $W \subset \mathbb{P}^3$ een vlak en zij $V_W \subset G(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ de verzameling van lijnen in W . In wezen is V_W de duale van W en is dus op zich een \mathbb{P}^2 die in principe ook kwadratisch ingebed zou kunnen zijn in \mathbb{P}^5 , maar dat hier niet is. Ook hier kunnen we hetzelfde argument gebruiken als bij V_P om te laten dat ook V_W een vlak is.

Zij nu omgekeerd $V \subset G(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ een vlak op de Grassmann-variëteit. Door te gebruiken dat de enige lijnen op $G(1, 3)$ lijnenwaaiers zijn, is snel in te zien dat V noodzakelijkerwijs van één van de twee hierboven beschreven vormen moet zijn.

CONCLUSIE 1 *Op $G(1, 3)$ komen twee vlakkensystemen voor die beide geparametriseerd worden door \mathbb{P}^3 . Twee verschillende vlakken uit hetzelfde systeem snijden elkaar in precies één punt en twee vlakken uit beide systemen snijden elkaar óf niet óf in een lijn.*

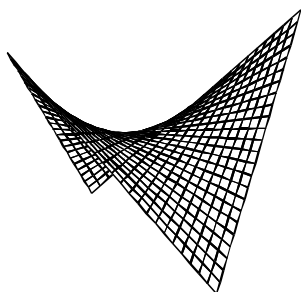
Op dit punt begint de \mathbb{P}^5 *in zicht* te komen: door in de \mathbb{P}^3 lijnen te laten bewegen, bewegen we ons over een kwadriek in \mathbb{P}^5 . Door één punt te fixeren, zien we voor onze ogen een vlak in \mathbb{P}^5 . Hetzelfde gebeurt als we een vlak fixeren waarbinnen we de lijnen laten bewegen. Ziet u waarom twee vlakken uit beide vlakkensystemen elkaar óf niet óf in een lijn snijden? Door in \mathbb{P}^3 *letterlijk* te kijken naar een V_P en een V_W (notatie als hierboven) en daarbij óók nog eens de positie van P ten opzichte van W varieert, dan ziet u voor uw ogen gebeuren dat twee vlakken (waarvan u er één beweegt door P te bewegen) in \mathbb{P}^5 elkaar eerst níét snijden en elkaar dan opeens in een lijn snijden *zonder* dat ze elkaar eerst in een punt snijden. Immers, zolang $P \notin W$ is er in \mathbb{P}^3 niet één lijn door P die bevat is in W . Zodra echter $P \in W$, is er opeens een hele lijnenwaaier in W met top P . Dit betekent dat de V_P en V_W elkaar in \mathbb{P}^5 in een lijn snijden.

7. KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN

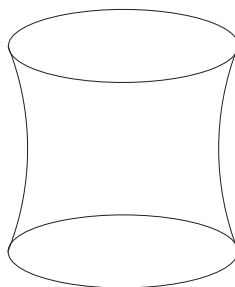
Kwadrieken zijn bekende figuren. Niet alleen voor wiskundigen, maar ook de leek kent ze, al is het dan vaak zonder de naam te kennen. Het bekendst is

natuurlijk het oppervlak van een bal (2-sfeer). Maar ook hoogovenschoorstenen (éénbladig hyperboloïden) en het zadelvormige dak van een buitenhuisje dat enerzijds wél ‘krom’ is, maar aan de andere kant gemaakt is van rechte palen zonder kromming (zadelvlak). Het verschil tussen de laatste twee ligt in de positie ten opzicht van het vlak op oneindig: Bij de éénbladige hyperboloïde snijdt de kwadriek het vlak op oneindig in een gladde kegelsnede (een kwadriek in \mathbb{P}^2), bij het zadelvlak is de kegelsnede op oneindig singulier en bestaat daar uit twee verschillende rechten.

Het zadelvlak:



De éénbladige hyperboloïde:



Het verschil tussen deze laatste twee en de 2-sfeer is anders van aard: de éénbladige hyperboloïde bevat rechte lijnen, de 2-sfeer niet. Dit onderscheid bestaat niet als we over \mathbb{C} werken. In de complexe \mathbb{P}^3 bestaat in wezen maar één glad kwadratisch oppervlak: de éénbladige hyperboloïde die twee lijnen van lijnen bevat (de twee lijnensystemen). Twee lijnen uit hetzelfde systeem snijden elkaar in het geheel niet en een lijn uit het éne systeem snijdt iedere lijn uit het andere systeem in precies één punt. Ieder punt van de kwadriek is zo'n snijpunt. Kijk maar naar de intersectie van de kwadriek met het raakvlak in dat punt. Hiermee zijn we op een interessant punt aangeland: als we in \mathbb{P}^n de snede nemen van een gladde kwadriek met een rakend hypervlak (een lineair ingebedde \mathbb{P}^{n-1} , of, anders gezegd, de nulpuntsverzameling van een homogene lineaire vergelijking) krijgen we *altijd* een kegel vanuit dat raakpunt over een gladde kwadriek in \mathbb{P}^{n-2} . Nu zijn we in staat een link te leggen tussen de Grassmann-variëteit $G(1, 3)$, een kwadriek in \mathbb{P}^5 , en kwadratische oppervlakken in \mathbb{P}^3 : een raakhypervlaksnede met de Grassmann-variëteit is een kegel over een gladde kwadriek in \mathbb{P}^3 . Door nu goed naar de bekende éénbladige hyperboloïde én naar lijnen in \mathbb{P}^3 te kijken kunnen we een blik werpen in \mathbb{P}^5 .

8. DE RAAKHYPERVERVLAKSNEDE

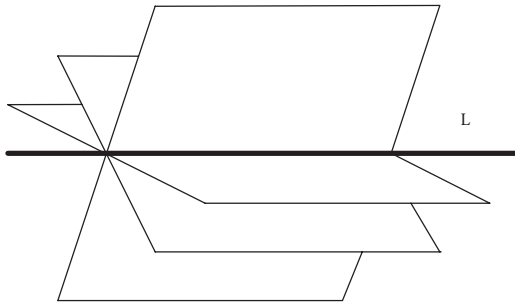
Zij $L \subset \mathbb{P}^3$ een lijn. Er geldt dus ook $L \in G(1, 3)$. De raakhypervlaksnede \mathcal{H}_L aan $G(1, 3)$ in L is een kegel over een gladde kwadriek Q in \mathbb{P}^3 . Welke lijnen in \mathbb{P}^3 liggen nu eigenlijk op \mathcal{H}_L ? Daar \mathcal{H}_L een kegel is, geldt voor ieder punt M op \mathcal{H}_L dat de verbindingslijn met L bevat is in \mathcal{H}_L en in het bijzonder dus

in $G(1, 3)$. Daar de enige lijnen op de Grassmann-variëteit lijnenwaaiers in \mathbb{P}^3 zijn, moet de lijn M in \mathbb{P}^3 de lijn L dus snijden. Omgekeerd, als de lijn N de lijn L snijdt in \mathbb{P}^3 , is de lijnenwaaier tussen L en N de verbindingslijn op $G(1, 3)$ en deze is noodzakelijkerwijs weer bevat in de raakhypervlaksnede.

CONCLUSIE 2 *De raakhypervlaksnede \mathcal{H}_L bestaat uit alle lijnen in \mathbb{P}^3 die de lijn L snijden.*

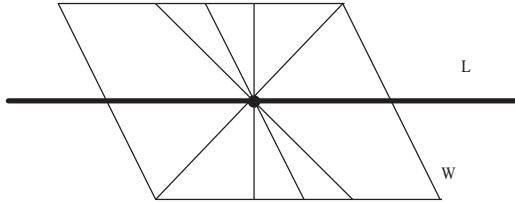
De kwadriek Q , waar \mathcal{H}_L de kegel over is, bevat twee lijnen van lijnen en een kegel over een lijn is een vlak. De raakhypervlaksnede \mathcal{H}_L bevat dus twee lijnen van vlakken: twee vlakkensystemen die elk geparametriseerd worden door \mathbb{P}^1 . Deze zijn heel mooi in \mathbb{P}^3 te zien. Voor het éne systeem kunnen we L zelf gebruiken als parameterverzameling. Bij ieder punt $A \in L$ is V_A een vlak in \mathcal{H}_L .

Merk op dat twee van deze vlakken elkaar altijd in één punt snijden: L . Het andere systeem is iets lastiger te zien. Voor ieder vlak $W \subset \mathbb{P}^3$ met $L \subset W$, vinden we weer een vlak van lijnen op $G(1, 3)$: V_W . De verzameling van vlakken waar L in ligt is zelf in wezen weer een \mathbb{P}^1 : het is immers een waaier:



Merk op dat ook twee vlakken uit dit systeem op de raakhypervlaksnede \mathcal{H}_L in \mathbb{P}^5 elkaar altijd weer in één punt snijden: L .

Op \mathcal{H}_L treffen we dus twee lijnen van vlakken aan met de eigenschap dat twee vlakken binnen één systeem elkaar altijd in precies één punt snijden: de top van \mathcal{H}_L . Hoe zit het met de doorsnijding van een vlak V_A uit het éne systeem met een vlak V_W uit het andere? Bedenk dat V_A en V_W beide een kegel zijn over twee lijnen a en b op een gladde kwadriek $Q \subset \mathbb{P}^3$, uit elk regelsysteem één. De lijnen a en b snijden elkaar op Q , dus $V_A \cap V_W$ is de kegel over dit snijpunt en is dus een lijn $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}_L$. Kunnen wij deze lijn (van lijnen) in \mathbb{P}^3 terugzien? Natuurlijk! V_A is het vlak van lijnen door het punt $A \in L$ en V_W is het vlak van lijnen in $W \supset L$. Dan is de lijn $V_A \cap V_W$ de verzameling lijnen in de lijnenwaaier die bestaat uit de lijnen door A en bevat in W :



9. DE RAAKHYPERVLAKSNEDE HERHAALD

Door een raakhypervlaksnede nóg een keer te snijden met een raakhypervlaksnede (rakend aan $G(1,3)$ in een punt dat níét op de eerste raaksnede ligt) vinden we op $G(1,3)$ een gladde kwadriek $Q = G(1,3) \cap \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$. De punten op deze kwadriek corresponderen met lijnen in \mathbb{P}^3 die twee kruisende lijnen l en m snijden. De twee lijnensystemen zijn goed te zien: bij ieder punt $A \in l$ vinden we lijn op Q : de lijnenwaaier vanuit A over m . Zo vinden we één lijn van lijnen op Q . Het andere lijnensysteem vinden we door vanuit punten op m de waaier te nemen over l .

10. DRIEMAAL IS SCHEEPSRECHT

Door voor de derde keer een (raak)hypervlaksnede van de Grassmann-variëteit te nemen houden we in \mathbb{P}^5 een kegelsnede (een kwadratisch ingebedde \mathbb{P}^1) over. In \mathbb{P}^3 betekent dit dat we kijken naar de lijnen die drie gegeven kruisende lijnen snijden. Wat is daar in \mathbb{P}^3 aan de hand? Bij twee kruisende lijnen is de (verzamelings-theoretische) vereniging van al deze lijnen nog gelijk aan de hele \mathbb{P}^3 . Bij drie kruisende lijnen l , m en n is dat echter niet het geval. Bij ieder punt A van l is er *precies één* lijn die A bevat en die m en n snijdt. Dit betekent dat de vereniging van alle lijnen die deze drie lijnen snijden niet de gehele ruimte \mathbb{P}^3 kan zijn, maar hoogstens een oppervlak is. Het is ook precies een oppervlak en wel precies een ... gladde kwadriek. De twee lijnensystemen op een gladde kwadriek in \mathbb{P}^3 blijken dus kegelsnedes te zijn in een \mathbb{P}^5 .

Hiermee zijn we aan het eind gekomen van een 'sight-seeing-tour' door \mathbb{P}^5 en zijn we in een bepaald opzicht ook weer terug bij het begin. Begonnen in \mathbb{P}^3 zijn we via Grassmann-variëteiten, Plücker-inbeddingen, hypervlaksneden en meetkundige beschouwing in \mathbb{P}^5 weer teruggekomen in \mathbb{P}^3 waar het allemaal begonnen is.

11. AFSLUITING

Beschouwingen als deze zijn verslavend voor wie wiskunde visueel beleeft. Het is net als kijken in het donker, hoe langer je kijkt, hoe meer je ziet; in dit geval letterlijk. Projectieve meetkunde is een schitterend mooi gebied in de wiskunde dat zich uitstrekt van de wiskunde in de oudheid (Pappos) tot de moderne algebraïsche meetkunde. Hopelijk stimuleert de lezing de toehoorder zijn leerlingen op school na te laten denken over wiskunde. Met name het dualiteitsprincipe in het projectieve vlak leent zich voor een eerste kennismaking met projectieve meetkunde.

Structuur en schoonheid in de *Sleutel tot de Rekenkunde* van al-Kāshī (ca. 1425)

J.P. Hogendijk
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
e-mail: hogend@math.uu.nl

1. ISLAMITISCHE WISKUNDIGE KUNST

Toen de profeet Mohammad omstreeks 610 met zijn prediking begon, was zijn woonplaats Mekka een handelsstad. In het midden van de stad lag de ka'aba, een nagenoeg kubusvormig bouwwerk dat als tempel diende voor diverse plaatselijke goden. Dit heiligdom trok veel pelgrims naar Mekka. Mohammad riep op tot islam ('overgave') aan de enige werkelijke God, Allah ('de (ene) God'), en tot afschaffing van de goden die in de ka'aba werden aanbeden. De meeste rijke handelaren in Mekka hadden weinig op met deze nieuwe leer, die in het begin voornamelijk door arme mensen werd aangenomen. In het jaar 622 namen Mohammad en de andere Moslims ('de overgegevenen,' d.w.z. aan Allah) de wijk naar het enkele honderden kilometers naar het noorden gelegen Yathrib, later Medinatu n-nabī ('Stad van de profeet') genoemd. Enkele jaren later slaagden de Moslims erin Mekka te veroveren, en onmiddellijk daarna werden op last van Mohammad de godenbeelden in de ka'aba vernietigd. Vanaf dat moment is de ka'aba zonder verdere franje voor alle Moslims een symbool van de eredienst aan Allah. Nog steeds brengen de Moslims overal op de wereld hun gerichtheid op Allah tot uitdrukking door elke dag in de richting van de ka'aba te bidden.

De moskeeën hebben in principe dezelfde sobere, bijna wiskundige, stijl als de ka'aba. We vinden er geen afbeeldingen van de profeet of heiligen, en zelfs geen afbeeldingen van levende wezens in het algemeen. Kalligrafie (van koranverzen) en geometrische figuren zijn wel toegestaan. Dit was een gunstige voorwaarde voor de ontwikkeling van een islamitische architectuur en ornamentiek gebaseerd op meetkundige vormen. Deze architectuur werd ook voor profane bouwwerken gebruikt. In de bijdrage van Jan van de Craats in deze bundel worden de mozaïeken van het Alhambra gebruikt om het moderne groepsbegrip te illustreren. Van de Craats laat hiermee iets zien van de tijdloze dimensie van de islamitische kunst, en ook van het potentieel hiervan om een idee van de schoonheid van de wiskunde over te brengen aan een breed publiek met algemene interesse in cultuur. Uiteraard hadden de ontwerpers van de mozaïeken niet de beschikking over het moderne groepsbegrip. Waarschijnlijk hadden de meesten van hen helemaal geen belangstelling voor theoretische meetkunde in de stijl van de *Elementen* van Euclides, die in de middeleeuwen islamitische cultuur wel uitgebreid werd bestudeerd door sterrenkundigen.

Er zijn niet veel details bekend over de ontwikkeling van de islamitische geometrische kunst en architectuur. Bijna geen middeleeuws Arabische en Perzische documenten over constructie van gebouwen en mozaïeken zijn bewaard gebleven. Een mogelijke verklaring is dat de ontwerpen geheim gehouden werden. Ook is het goed mogelijk dat de meeste werktekeningen die echt gebruikt werden, door dit gebruik versleten zijn en daarna zijn weggegooid. Een waarschijnlijk 16e-eeuwse rol met tekeningen zonder begeleidende tekst is ontdekt in het Topkapi paleis te Istanbul, en gepubliceerd in een prachtige maar zeer moeilijk verkrijgbare facsimile-editie [Necipoglu 1995]. Als met deze tekeningen ooit mozaïeken of ornamenten zijn gemaakt, dan is dit waarschijnlijk in Noordwest Iran gebeurd. Ook is er een Perzisch handschrift met constructietekeningen en korte verklaringen in de Parijse Bibliothèque Nationale. Dit handschrift is gepubliceerd in Perzisch en in Russische vertaling, maar in westerse talen is er niet veel over geschreven.⁶ Veel patronen in dit handschrift zijn wiskundig interessant, omdat ze niet met passer en lineaal kunnen worden geconstrueerd. Wat dit met de praktijk te maken heeft is niet erg duidelijk, want tot voor kort zijn deze patronen nooit op bestaande gebouwen gevonden. In april 2004 heb ik een uit regelmatige zevenhoeken bestaand mozaïek in het handschrift ‘in het echt’ gevonden in de Noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee in Isfahan, die in de elfde eeuw werd gebouwd.

Er is wel een middeleeuwse tekst bekend waarin uitgebreid aan islamitische architectuur gerekend wordt door een wiskundige. Dit is de *Sleutel van de Rekenkunde* van al-Kāshī, geschreven omstreeks 1425. Toen al-Kāshī de *Sleutel tot de Rekenkunde* schreef, verbleef hij in Samarkand in het tegenwoordige Uzbekistan, waar in die tijd veel nieuwe gebouwen werden neergezet. Al-Kāshī heeft wel met bouwlieden gesproken, want hij vermeldt een technische term die zij gebruiken voor de opening van een boog. Zijn boek heeft echter als doelstelling rekenen en de bepaling van oppervlakten en inhoud. Hij zegt niets over hoe de gebouwen werden geconstrueerd, en ook niets over de eventuele symbolische betekenis van de gebruikte vormen, en dus licht hij ons niet in over een aantal zaken die we ook graag zouden willen weten. Zijn werk is wel een authentieke bron uit de islamitische traditie, en interessant voor kunsthistorici omdat het in elk geval laat zien welke soort wiskunde in die traditie beschikbaar was.

2. AL-KĀSHĪ EN ZIJN SLEUTEL TOT DE REKENKUNDE

Jamshīd al-Kāshī werd vermoedelijk omstreeks 1370 geboren in Iran. Zijn naam al-Kāshī geeft aan dat hij afkomstig is uit de Kāshān, nu een stad van 400.000 inwoners op 300 km ten zuiden van Teheran. Hij groeide op in armoedige omstandigheden, maar verwierf zich een reputatie als wis- en sterrenkundige. In 1420 werd hij naar Samarkand uitgenodigd door de plaatselijke vorst Ulugh Beg, zelf ook een groot liefhebber van wiskunde en sterrenkunde. Hier bleef al-Kāshī tot zijn dood in 1429 en hier schreef hij de *Sleutel tot de Rekenkunde* (Arabisch: *miftāh al-ḥisāb*). Al-Kāshī's moedertaal was Perzisch, een Indo-Europese taal, verwant met het Nederlands, maar zoals de meeste van zijn

⁶ Voor verwijzingen zie [Hogendijk 1996].

tijdgenoten schreef hij zijn wiskundige en sterrenkundige werk in het Arabisch, dat toen de taal van de wetenschap was. Behalve de *Sleutel tot de Rekenkunde* publiceerde hij ook een berekening van π in 16 decimalen [Luckey 1953] en een methode voor de berekening van de sinus van 1 graad via de numerieke oplossing van een derdegraadsvergelijking [Rosenfeld & Hogendijk 2003]. Uit Samarkand schreef hij ook twee Perzische brieven aan zijn vader in Kāshān, die hij met twee verschillende karavananen meegaf. Beide brieven zijn bewaard⁷ en ze geven een goed inzicht in de zelfverzekerde persoon van al-Kāshī, zijn werk op het sterrenkundig observatorium te Samarkand, en zijn relaties met collega's en met de vorst Ulugh Beg.

De *Sleutel tot de Rekenkunde* is een boek van een paar honderd bladzijden, waarin al-Kāshī's grote rekentalent goed zichtbaar wordt. Het boek werd snel populair en er zijn meer dan 30 Arabische manuscripten bewaard. Eén van de oudste daarvan is in de wereldberoemde collectie oosterse handschriften van de Universiteitsbibliotheek te Leiden. Sinds 1880 is de *Sleutel tot de Rekenkunde* drie keer in het Arabisch uitgegeven, en het boek is ook verschenen in Russische vertaling [Rosenfeld 1956]. Het werk is tot nu toe maar voor een klein gedeelte in een westerse taal vertaald [Luckey 1951]. Al-Kāshī waagde zich op allerlei terreinen die zijn voorgangers nooit hadden betreden. Sommige van zijn resultaten zijn wel bekend in de westerse literatuur, maar andere niet; een voorbeeld uit de laatste categorie zijn zijn berekeningen van oppervlakten en inhouden van de regelmatige en van enkele halfregelmatige veelvlakken.

De *Sleutel tot de Rekenkunde* bestaat uit vijf delen. Deel 1 gaat over berekeningen met natuurlijke getallen in wat al-Kāshī het 'Indiase' systeem noemt, dat wil zeggen de Hindu-Arabische cijfers die wij tegenwoordig nog steeds gebruiken. Al-Kāshī gebruikte de vormen van de cijfers die in het Midden-Oosten gangbaar zijn. In deel 2, over breukrekenen, behandelt hij zaken als optellen en vereenvoudigen van breuken, en ook decimaalbreuken. Decimaalbreuken zijn in de islamitische cultuur diverse malen uitgevonden maar ze werden nooit erg populair. Deel 3 heet 'over de methode van rekenen van de sterrenkundigen,' en hierin behandelt al-Kāshī rekenen in het sexagesimale stelsel, dat werkt met graden, minuten, seconden, enzovoort. Deel 4 gaat over de bepaling van oppervlakten en inhouden. Ten slotte bespreekt al-Kāshī in deel 5 het gebruik van algebra en andere rekentrucs om onbekenden (meestal in meetkundige problemen) uit te rekenen.

3. HOOFDSTUK 9 VAN DEEL 4 VAN DE SLEUTEL TOT DE REKENKUNDE

Deel 4 van de *Sleutel tot de Rekenkunde* begint met hoofdstukken over de bepaling van de oppervlakten van (1) driehoeken, (2) vierhoeken, (3) veelhoeken, (4) de cirkel en cirkelsegmenten, (5) andere vlakke figuren, (6) bol, cylinder en kegel en segmenten daarvan, en over (7) de inhouden van al deze figuren, en (8) het bepalen van de samenstelling ervan door wegen, op basis van kennis van soortelijke gewichten. Het negende en laatste hoofdstuk van deel 4 van de

⁷ Voor de eerste brief zie [Bagheri 1997] (Engelse vertaling), voor de tweede brief [Sayılı 1960] (Perzisch origineel met Turkse en Engelse vertaling) en [Kennedy 1960] (Engelse vertaling).

Sleutel tot de Rekenkunde heet ‘het meten van bouwwerken en gebouwen.’ Met meten wordt hier natuurlijk niet opmeten bedoeld, maar het bepalen van oppervlakte en inhoud. Het negende hoofdstuk is op zijn beurt onderverdeeld in drie kleinere hoofdstukken (1) over bogen, (2) over koepels, en (3) over *muqarnas*. De boog is in het tegenwoordige Iran en de landen daaromheen een vaak voorkomend element in de architectuur van moskeeën, gebouwen, en bruggen. In oude moskeeën in Irak, Iran en de aangrenzende ex-sovjetrepublieken vinden we veel koepels, vaak van onbeschrijfelijke schoonheid. *Muqarnas* is het Arabische woord voor de stalactietengewelven aan de binnenkant van koepels, zoals die ook in het Alhambra gevonden worden. In foto 1 in het kleurenkatern (pagina 77) zien we de koepel van de Lotfollah moskee te Isfahan in Iran, met daaronder de ingang en verscheidene bogen. In de grote boog zien we *muqarnas*. Bogen en *muqarnas* zijn ook te zien op foto 2, genomen in de Vrijdagmoskee te Isfahan. De Lotfollah moskee en het deel van de Vrijdagmoskee op foto 2 stammen uit de tijd van de Safawieden die Isfahan in de zeventiende eeuw regeerden, en ze zijn dus recenter dan het werk van al-Kāshī. Foto 3 is genomen in de Noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee te Isfahan, die al in de 11e eeuw is gebouwd. De bogen zijn primitiever maar hebben wel een soortgelijke vorm.

Het negende hoofdstuk van de *Sleutel tot de Rekenkunde* is al jaren lang het object van studie van Dr. Yvonne Dold-Samplonius van de Universiteit van Heidelberg. Uniek aan haar onderzoek is dat de wetenschappelijke analyses en edities van de hoofdstukken vergezeld gaan van een videopresentatie voor een groot publiek.⁸ Deze video’s worden geproduceerd in samenwerking met het Interdisciplinary Center for Scientific Computing te Heidelberg.

Het derde hoofdstuk over *muqarnas* is op dit moment onderwerp van een promotieonderzoek van Drs. Silvia Harmsen aan het genoemde instituut te Heidelberg. Het basisprobleem is om zoveel informatie over de structuur van *muqarnas* te vinden, dat uit een tweedimensionale (horizontale) plattegrond van de *muqarnas* op eenduidige manier het driedimensionale oppervlak gegeneerd kan worden. Dit kan belangrijk zijn bij restauratie van *muqarnas*. Het derde hoofdstuk is de enig bekende middeleeuwse bron waarin *muqarnas* in detail wordt beschreven. Er wordt momenteel gewerkt aan een proefversie van een video over *muqarnas* in het algemeen. Men kan de stand van zaken bijhouden op de website www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/ngg/Muqarnas/

De rest van deze bijdrage zal worden besteed aan de hoofdstukken 1 en 2 over bogen en koepels. Over deze hoofdstukken is een video uitgekomen, waarin al-Kāshī’s beschrijvingen van bogen en koepels worden vergeleken met de bestaande koepels van moskeeën en graftombes in Samarkand en Bukhara in Uzbekistan. Hierbij zijn ook de graven van de vorst Ulugh Beg en al-Kāshī’s collega en concurrent Qāḍī-Zādeh al-Rūmī, die de wiskundeleraar van Ulugh Beg was toen al-Kāshī in Samarkand aankwam. Al-Kāshī’s eigen graf in Samar-

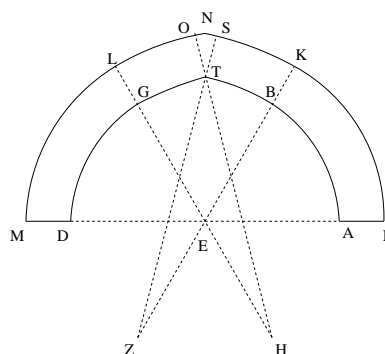
⁸ Tot nu toe is verschenen: van hoofdstuk 1 analyse in [Dold 2003]; voor hoofdstuk 2 analyse in [Dold 1992], [Dold 1993], [Dold 2003]; voor hoofdstuk 3 analyse in [Dold 1992/3] met hierin ook een letterlijke Engelse vertaling van het hoofdstukje en een Arabische tekst; verdere analyse in [Dold 1996] en [Dold 2003].

kand is verloren gegaan, en in het tweede gedeelte van de video heeft Yvonne Dold een virtuele graftombe voor al-Kāshī ontworpen met gebruikmaking van zijn eigen analyses van koepels. De video zal tijdens de cursus worden vertoond en kan worden besteld (bestelinformatie in de bibliografie bij [Dold 1997]). Het bestuur van de Iraanse stad Kāshān was zó onder de indruk van de video dat mevrouw Dold tot ereburgeres van de stad is uitgeroepen.

De tekst van hoofdstuk 1 en 2 over bogen en koepels is op dit moment nog niet in definitieve vorm gepubliceerd. Op de internetpagina www.math.uu.nl/people/hogend/kashi.html staat een door mij getypte ruwe Arabische versie, alleen gebaseerd op het Leidse handschrift, met een Nederlandse vertaling, speciaal voor de deelnemers van deze cursus gemaakt. Tekst en vertaling hebben geen wetenschappelijke pretenties, en zoals uit de voetnoten blijkt zijn er diverse onopgeloste problemen. Door vergelijking met andere Arabische handschriften zal mevrouw Dold hieruit de definitieve Arabische editie vaststellen en de gecorrigeerde Arabische tekst met Engelse vertaling publiceren.

4. VIJF SOORTEN BOGEN VAN AL-KĀSHĪ

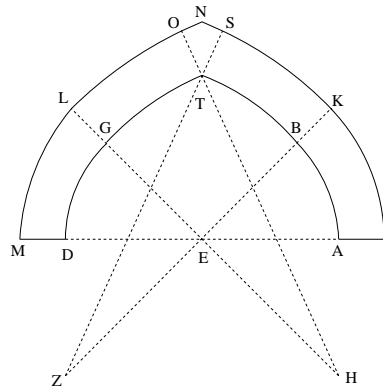
Volgens al-Kāshī hadden eerdere wiskundigen in hun boeken de boog behandeld als een deel van een cylinder, maar zulke bogen had hij nooit in de praktijk gezien. Hij begint daarom met een beschrijving van vijf typen bogen die hij wel zelf gezien had. Deze beschrijvingen zullen hier in iets gemoderniseerde vorm worden gegeven, maar in Figuren 1 en 2 zal dezelfde notatie worden gebruikt als in de figuren van al-Kāshī.



Figuur 1. De eerste boog van al-Kāshī

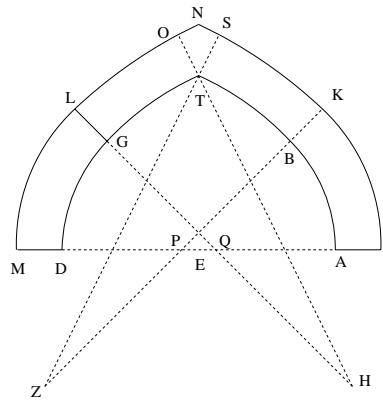
Voor types 1 en 2 beginnen we met een horizontaal lijnsegment AD met als lengte de breedte $2r$ van de opening van de boog. Dit segment wordt aan beide zijden verlengd tot I en M zodat AI en DM gelijk zijn aan de dikte d van de boog.

Vanuit het midden E van segment AD beschrijven we vier cirkelbogen DG, ML, BA, KI , groot 60° (type 1) of 45° (type 2), en met stralen r en $r + d$. Deze bogen worden begrensd door stralen EGL en EBK . We verlengen



Figuur 2. De tweede boog van al-Kāshī

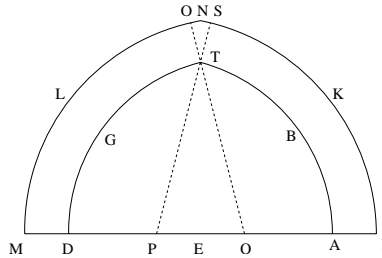
nu GE en BE tot H en Z zodat $EH = EZ = r$ (type 1) en $EH = EZ = r\sqrt{2}$ (type 2). Dan beschrijven we met middelpunten H en Z twee cirkelbogen met stralen HG en ZB , die eindigen in punt T recht boven E , waar ze een stompe hoek met elkaar maken. Dan beschrijven we nog twee cirkelbogen met middelpunten H en Z en stralen HL en ZK en we stoppen in punten O en S die op het verlengde van de stralen HT en ZT liggen. Deze nieuwe cirkelbogen hebben gemeenschappelijke raaklijnen met de eerder geconstrueerde bogen in punten G, L, B, K . Ten slotte construeren we de ‘amandel’ $OTSN$ door twee loodlijnen ON en SN op OT en ST op te richten. De boog is nu klaar. Bogen van type 2 komen volgens al-Kāshī meer voor dan alle andere typen.



Figuur 3. De derde boog van al-Kāshī

De derde boog lijkt op de tweede, met dien verstande dat de middelpunten van de bogen van 45 graden DG, ML, BA, KI niet meer in E liggen maar in punten P, Q die op afstand $r/8$ van E liggen. De stralen van de bogen zijn nu $r + r/8$; in Figuur 3 is Q middelpunt van bogen DG en ML , en P van BA en

KI. Om de bogen mooi op elkaar aan te laten sluiten liggen de middelpunten H en Z op de stralen GQ en BP , en wel zodanig dat $QH = PZ = r\sqrt{2}$.



Figuur 4. De vierde boog van al-Kāshī

In het vierde type verdelen de punten P en Q segment AD in drie gelijke delen. Met middelpunten P en Q beschrijven we bogen DGT , ABT die eindigen in T verticaal boven E en daar een stompe hoek maken. We beschrijven dan, ook met middelpunten P en Q , de bogen MLO en IKS die eindigen in punten O en S op het verlengde van de stralen QT , PT . Ten slotte construeren we de ‘amandel’ $OTSN$ als boven.

Het vijfde type wordt door al-Kāshī niet uitgebreid besproken, maar komt op bestaande bouwwerken wel algemeen voor. Voor de definitie verwijzen we naar de vertaling op www.math.uu.nl/people/hogend/kashi.html. Yvonne Dold heeft een rotatielichaam van een boog van het vijfde type gebruikt voor de virtuele graftombe van al-Kāshī.

De bogen kunnen op verschillende manieren worden toegepast. Meestal is het segment $MDAI$ een aantal meters boven de grond en rust de boog op verticale muren onder AI en DM . Vaak is het gedeelte boven $IKNOM$ opgevuld met een muur.

5. AL-KĀSHĪ'S BEREKENINGEN AAN DE BOGEN

Al-Kāshī wil nu zijn lezer in staat stellen voor de genoemde vier typen bogen van gegeven spanwijdte $2r$ en gegeven dikte d de volgende vijf grootheden, die wij met Romeinse cijfers zullen aangeven, op gemakkelijke manier uit te rekenen:

1. I = De lengte van de holle kant $DGTBA$
2. II = De oppervlakte van de gevel $DGTBAIKSNOLM$
3. III = De hoogte ET van de laagste knik
4. IV = De hoogte EN van de top
5. V = De oppervlakte van de opening $DGTBAE$.

Al-Kāshī gebruikt geen algebraïsche notatie, maar hij was zich van de meetkundige equivalenten van de volgende formules bewust (waarin $2r$ staat voor de spanwijdte AD en d voor de dikte DM):

1. I = $c_1 \cdot 2r$

2. $\text{II} = (c_1 \cdot 2r + c_2 \cdot d) \cdot d$
3. $\text{III} = c_3 \cdot 2r$
4. $\text{IV} = c_3 \cdot 2r + c_4 \cdot d$
5. $\text{V} = c_5 \cdot (2r)^2$

De getallen c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 zijn constanten zijn die voor de vier typen verschillende waarden aannemen.

Het probleem komt nu neer op de berekening van de constanten c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 . Al-Kāshī heeft deze constanten modern gezegd in drie sexagesimalen achter de komma uitgerekend. Hij gebruikt geen scheidingstekens maar geeft de sexagesimalen aan met graden, minuten, seconden en tertsen. Daarna heeft hij de constanten omgerekend naar drie decimalen achter de komma (zoals gezegd was hij één van degenen, die de decimaalbreuken uitgevonden heeft). Ook hier heeft hij geen scheidingstekens, maar noemt de decimalen eenheden, eerste tienden, tweede tienden, derde tienden. Daarna geeft hij de resultaten in sexagesimalen en decimalen weer in een tabel.

Figuur 5 is een afbeelding van deze tabel in het Leidse handschrift van de *Sleutel tot de rekenkunde*, en Figuren 6 en 7 geven de bovenste en onderste helft van de tabel in moderne notatie weer. In de bovenste helft staan de sexagesimale waarden uitgedrukt in alfabetische notatie, die alleen gelezen kan worden door mensen die het Arabische alfabet kennen.⁹ Omdat het Arabisch van rechts naar links schrijft is Figuur 6 ten opzichte van het handschrift gespiegeld. Bij Figuur 7 is dit bewust niet gedaan, omdat de lezer de decimalen in het handschrift kan herkennen zonder verdere kennis van het Arabisch. De vormen van de cijfers lijken op de vorm die tegenwoordig in het Midden-Oosten gebruikelijk is.

Nadat hij de tabel heeft gegeven, legt al-Kāshī de berekening van de constanten stap voor stap uit. In de loop van deze berekening wordt ook voor een groot deel duidelijk waarom de formules I tot en met V kloppen. Al-Kāshī heeft hierbij een nauwkeurige waarde voor π en een sinustabel nodig. Voor details verwijzen we naar de vertaling op www.math.uu.nl/people/hogend/kashi.html

Afkortingen:

- g = graden (delen), m = minuten, s = seconden, t = tertsen
- e = eenheden, i = tienden, ii = tweede tienden, iii = derde tienden.

Arabische opschriften boven de tabel:

I = als we de spanwijdte hiermee vermenigvuldigen, krijgen we de holle kant van de boog.

⁹ Voor degenen die Arabisch kennen, volgt hier de waarde van de letters, voorzover nodig: alif = 1, bā' = 2, jīm = 3, dāl = 4, hā' = 5, wāw = 6, zā' = 7, ḥā' = 8, ṭā' = 9, yā' = 10, kāf = 20, lām = 30, mīm = 40, nūn = 50. De nul wordt weergegeven door hetzelfde teken dat al in de Griekse oudheid gebruikt werd, namelijk een o (afkorting van ouden = niets), verbonden met een streepje erboven. Een getal als 23 werd weergegeven met het symbool voor 20 gevolgd door het symbool voor 3. Ten slotte staat een getal zoals 1 graad 23 minuten 56 seconden 19 tertsen voor $1 + \frac{23}{60} + \frac{56}{3600} + \frac{19}{216000}$.

ادواتها وسعها الظاهر في...	كيفية مشهوره الظاهر	ادواتها وسعها الظاهر في...	كيفية مشهوره الظاهر	ادواتها وسعها الظاهر في...	كيفية مشهوره الظاهر
الوجه الاول	الركور	الوجه الثاني	الركور	الوجه الثالث	الركور
الوجه الرابع	الركور	الوجه الخامس	الركور	الوجه السادس	الركور
الوجه السابع	الركور	الوجه الثامن	الركور	الوجه التاسع	الركور
الوجه العاشر	الركور	الوجه الحادي عشر	الركور	الوجه الثاني عشر	الركور
الوجه الثالث عشر	الركور	الوجه الرابع عشر	الركور	الوجه الخامس عشر	الركور
الوجه السادس عشر	الركور	الوجه السابع عشر	الركور	الوجه الثامن عشر	الركور
الوجه التاسع عشر	الركور	الوجه العشرون	الركور	الوجه الحادي والعشرون	الركور
الوجه الثاني والعشرون	الركور	الوجه الثالث والعشرون	الركور	الوجه الرابع والعشرون	الركور
الوجه الخامس والعشرون	الركور	الوجه السادس والعشرون	الركور	الوجه السابع والعشرون	الركور
الوجه الثامن والعشرون	الركور	الوجه التاسع والعشرون	الركور	الوجه الثلاثين	الركور

Figuur 5. Afbeelding van de tabel in folio 77a van het handschrift Or. 185 in de Universiteitsbibliotheek te Leiden. Gepubliceerd met vriendelijke toestemming van de curator, Prof.dr. J.J. Witkam.

II = als we de dikte van de boog hiermee vermenigvuldigen, en het optellen bij de holle kant van de boog, en de som met de dikte van de boog vermenigvuldigen, krijgen we de oppervlakte van de gevel ervan.

III = we vermenigvuldigen de spanwijdte hiermee, dan krijgen we de hoogte van de laagste knik.

IV = we vermenigvuldigen de knik van de boog hiermee en we tellen het resultaat op bij de hoogte van de laagste knik, dan krijgen we de hoogte van de hoogste knik.

V = we vermenigvuldigen het kwadraat van de spanwijdte van de boog hiermee, dan krijgen we de oppervlakte van het open deel, dat de bouwers 'het

	I	II	III	IV	V
	g m s t	g m s t	g m s t	g m s t	g m s t
eerste geval	1 37 26 6	1 35 37 28	0 34 7 38	1 1 58 4	0 24 28 42
tweede geval	1 39 2 19	1 35 55 42	0 35 55 16	1 5 55 12	0 25 9 13
derde geval	1 42 44 3	1 36 21 47	0 38 17 30	1 6 55 38	0 27 2 34
vierde geval	1 45 26 57	1 34 34 44	0 38 43 47	1 5 55 12 als bij de tweede	0 28 41 41

Figuur 6. *Al-Kāshī's tabel in sexagesimalen*

V	IV	III	II	I	
e i ii iii	e i ii iii	e i ii iii	e i ii iii	e i ii iii	
4 0 8	1 0 3 3	5 6 9	1 5 9 4	1 6 2 4	eerste geval
4 1 9	1 0 9 9	5 9 8	1 5 9 9	1 6 5 1	tweede geval
4 5 1	1 1 1 5	6 3 8	1 6 0 6	1 7 1 2	derde geval
4 7 8	1 0 9 9	6 4 5	1 5 7 6	1 7 5 7	vierde geval

Figuur 7. *Al-Kāshī's tabel in decimalen*

passeeer¹⁰ noemen.

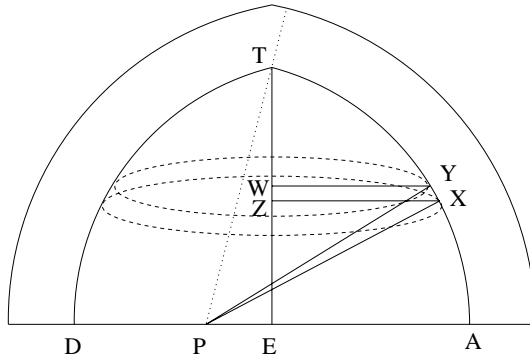
6. AL-KĀSHĪ'S ANALYSE VAN KOEPELS

Volgens al-Kāshī kunnen koepels een bolvorm of kegelvorm hebben, maar ze kunnen ook ontstaan door rotatie van een boog om de verticale as *ET* door het midden van het segment *AD* in de figuren 1 tot en met 4. Het bepalen van op-

¹⁰ Hier staat in het handschrift een mij onbekende term, *bāsīr* of *pāsīr*, waarmee 'opening' bedoeld moet zijn. Ik neem aan dat het een Perzisch woord betreft en heb het min of meer letterlijk in het Nederlands weergegeven. Perzisch is een Indo-Europese taal en daarom lijken een aantal woorden in het Perzisch en het Nederlands op elkaar. Moderne praktijkvoorbeelden die ik ben tegengekomen: be-nām-e Godā (staat boven elke officiële brief) = In de naam van God, dogtar = dochter, behtar = beter, moertsje = miertje, geili goeb = heel goed. Zo kan men hele zinnen maken: Goda geili goeb est = God is heel goed.

pervlakte en inhoud van deze koepels levert een interessant wiskundig probleem op. In de Griekse wiskunde in de oudheid waren de oppervlakten en inhoud van kegel, cylinder, bol en bolsegmenten bepaald. Het werk van Archimedes waarin deze resultaten werden bewezen was in het Arabisch vertaald en in de islamitische traditie algemeen bekend. Als we de boog in Figuur 1 roteren, ontstaan uit de bogen GD en LM bolsegmenten, en uit de rechte lijnen ON en SN kegeloppervlakken. De oppervlakten van deze gedeelten zouden dus in principe uitgerekend kunnen worden. Met bogen LO en GT ligt de situatie minder eenvoudig, want zij produceren een rotatielichaam van een cirkelboog om een as die niet de diameter van de cirkel is. Daarom neemt al-Kāshī zijn toevlucht tot een numerieke benadering.

Allereerst verdeelt hij de oppervlakte van de koepel met behulp van horizontale sneden in plakjes. Het hoogste plakje kan benaderd worden met een kegel en de overige plakjes als afgeknotte kegels, en omdat de oppervlakte en inhoud daarvan bekend zijn, kan de zij-oppervlakte en inhoud van elk plakje benaderd worden. We krijgen een benadering van de oppervlakte en inhoud van de koepel door al die oppervlakten c.q. inhoud en op te tellen. Al-Kāshī zegt ook dat hij gevonden heeft dat het resultaat nauwkeurig genoeg is als we de koepel in 7 of 8 plakjes verdelen. Modern gezien benadert al-Kāshī een oppervlakte (een integraal) door iets wat op een Riemanssom lijkt.



Figuur 8. Oppervlaktebepaling van een koepel van het vierde type

Al-Kāshī heeft deze benadering uitgevoerd voor de koepel van het vierde type (Figuur 4, 8) en geeft als oppervlakte van het gekromde binnenste deel (rotatielichaam van DTA) een bedrag van $(1 + 46/60 + 32/3600) = 1.775$ maal het kwadraat van de spanwijdte. De inhoud van de lege ruimte in koepel geeft hij als $18/60 + 23/3600 = 0.306$ maal de derde macht van de spanwijdte.

Met behulp van de moderne integraalrekening kunnen we gemakkelijk uitrekenen hoe goed deze benaderingen zijn. In Figuur 8 zien we dezelfde boog als Figuur 4. Door de rotatie hiervan om ET ontstaat de koepel waarvan de oppervlakte en inhoud van het inwendige gevraagd zijn. Kies twee punten X en Y die vlak bij elkaar op de boog liggen, en noem Z en W de loodrechte projecties van X en Y op TE . We noteren $\angle XPA = \theta$, $\angle XPY = d\theta$, en

$AD = 2r$. Dan $EP = \frac{1}{3}r$, $AP = \frac{4}{3}r = PX$, en $XZ = \frac{4}{3}r \cos \theta - \frac{1}{3}r$. Verder geldt $|XY| \approx \frac{4}{3}rd\theta$.

We bekijken een plakje met onderkant door X en bovenkant door Y , zie de ellipsen in Figuur 8. Voor de oppervlakte van de afgeknotte kegel met zelfde bovenkant en onderkant vinden we de benadering $2\pi \cdot |XZ| \cdot |XY| = \frac{8}{3}\pi r (\frac{4}{3}r \cos \theta - \frac{1}{3}r)$. Om de oppervlakte te vinden moeten we deze functie integreren over het interval van 0 tot θ_0 waarbij $\theta_0 = \angle APT$. Omdat $\cos \theta_0 = |EP|/|AP| = 1/4$ geldt $\theta_0 = \arccos \frac{1}{4}$. Door de integraal uit te werken vinden we als oppervlakte $\frac{8}{9}\pi r^2 (4 \sin \theta_0 - \theta_0) = \frac{2}{9}\pi (\sqrt{15} - \arccos \frac{1}{4}) \cdot (2r)^2$. We gebruiken hierbij $\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}$. Merk op dat de hoek θ_0 in de uitkomst van de integraal in radialen moet worden uitgedrukt.

Omdat $\frac{2}{9}\pi (\sqrt{15} - \arccos \frac{1}{4}) = 1,7836\dots$, kunnen we concluderen dat al-Kāshī's getal 1,775 een goede benadering is (vergelijk [Dold 1992]).

Voor het vinden van de inhoud van de koepel willen we, in de woorden van Descartes, de lezer niet beroven van 'het plezier om dit zelf te leren beheersen, en het voordeel om de eigen geest te oefenen door dit uit te werken.'

Voor het oppervlakte van het buitenste deel lijkt al-Kāshī dezelfde formule te geven, maar deze is minder correct en de tekst in het Leidse handschrift is onduidelijk.

Al-Kāshī's bepalingen van de oppervlakten van koepels zouden een praktische toepassing gehad kunnen hebben. Koepels werden vaak betegeld, en het is handig om te weten hoeveel tegels er ongeveer nodig zijn, en men zou de tegelzetter een salaris kunnen uitbetalen van een constante maal de betegelde oppervlakte. De koepels van belangrijke islamitische heiligdommen worden soms verguld (voorbeelden in najaf, Qom en Meshed), en in principe zou met al-Kāshī's coëfficiënten kunnen worden uitgerekend hoeveel goud daarvoor nodig is. Of al-Kāshī's wiskundige resultaten over koepels ooit zijn toegepast, is niet duidelijk. Om dit na te gaan zou men nog veel zoekwerk in bibliotheken in oosterse landen moeten doen. In elk geval heeft een vraag die uit de islamitische architectuur afkomstig is, al-Kāshī geïnspireerd tot een stukje grensverleggende wiskunde.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Bagheri, 1997. A Newly Found Letter of al-Kāshī on Scientific Life in Samarkand, *Historia Mathematica* **24**, 241–256.
2. Yvonne Dold-Samplonius, 1992. The XV-th Century Timurid Mathematician Ghiyāth al-Dīn Jamshīd al-Kāshī and his Computation of the Qubba, in S.S. Demidov et. al., eds., *Amphora: Festschrift for Hans Wussing on the Occasion of his 65th Birthday*, Basel: Birkhäuser, pp. 171–181.
3. —, 1992/3. Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kāshī, *Centaurus* **35**, pp. 193–242.
4. —, 1993. The Volume of Domes in Arabic Mathematics, in: M. Folkerts, J.P. Hogendijk, eds., *Vestigia Mathematica: Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam: Rodopi, pp. 93–106.

5. —, 1996. How al-Kāshī Measures the Muqarnas: A Second Look, in M. Folkerts, ed., *Mathematische Probleme im Mittelalter – Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden: Harrassowitz, pp. 57–90.
6. — 1997. Video: Qubba for Al-Kashi, 18 minutes, Providence: Americal Mathematical Society, te bestellen via www.ams.org/bookstore/videos
7. —, 2003. Calculating Surface-areas and Volumes in Islamic Architecture, in Jan P. Hogendijk, Abdelhamid I. Sabra, eds., *The Enterprise of Science in Islam: New Perspectives*, Cambridge: MIT Press, pp. 235–265.
8. Jan P. Hogendijk, 1996. Een workshop over Iraanse mozaïeken, *Nieuwe Wiskrant* **16** no. 2, pp. 38–42.
9. E.S. Kennedy, 1960. A Letter of Jamshīd al-Kāshī to his father: Scientific Research at a Fifteenth Century Court, *Orientalia* **29**, pp. 191–213, herdrukt in E.S. Kennedy, *Studies in the Islamic Exact Sciences*, Beirut 1983, pp. 722–744.
10. Paul Luckey, 1951. *Die Rechenkunst bei Ğamšīd b. Masʿūd al-Kāshī*, Wiesbaden: Kommissionsverlag Franz Steiner, 1951, herdrukt in [Sezgin 1998].
11. —, 1953. *Die Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-risāla al-muḥīṭīya) von Ğamšīd b. Masʿūd al-Kāshī, übersetzt und erläutert von P. Luckey, herausgegeben von A. Siggel*, Berlin: Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften, Jahrgang 1950 no. 6, herdrukt in [Sezgin 1998] pp. 227–329.
12. Gülru Necipoğlu, 1995. *The Topkapı Scroll, geometry and ornament in Islamic architecture: Topkapı Palace Museum Library MS. H. 1956, With an Essay on the Geometry of the Muqarnas by Moḥammad al-Asad*, Santa Monica, Ca. 90401-1455: Getty Center for the History of Art and the Humanities, ISBN 0-89236-335-5.
13. Boris A. Rosenfeld, 1956. *Dzhemshid Giyaseddin al-Kashi, Klyuch Arifmetiki, Traktat ob Okruzhnosti*, Per. B.A. Rosenfeld, comm. A.P. Yuschkevitch, B.A. Rosenfeld, Moskva: Gosudarstvennoe Izdatelstvo.
14. Boris A. Rosenfeld, Jan P. Hogendijk, 2003. A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* **15**, 25–65.
15. A. Sayılı, 1960. *Uluğ Bey ve Semerkanddeki ilim faaliyeti hakkında Giyasüddin-i Kāshî'nin mektubu* (Ghiyâth al-Dîn al-Kāshî's letter on Ulugh Bey and the scientific activity in Samarqand), Ankara 1960, 115 pp, herdrukt in [Sezgin 1998], pp. 361–473.
16. F. Sezgin, 1998. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 56, Frankfurt: Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften.

Het invullen van Eschers Prentententoonstelling

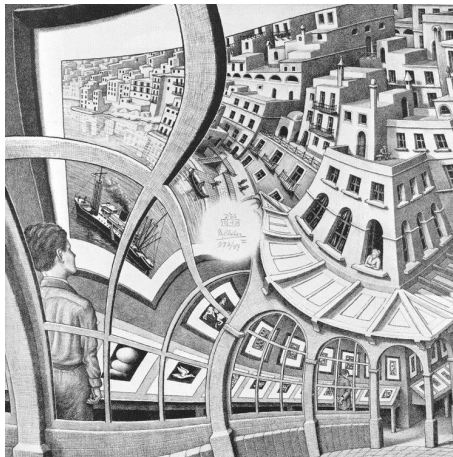
B.J.H. Jansen

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

e-mail: bjansen@math.leidenuniv.nl

1. INLEIDING

In het begin van het nieuwe millennium vond Prof. dr. Hendrik Lenstra een methode om het gat in Eschers (1898–1972) Prentententoonstelling op een wiskundig natuurlijke wijze te vullen. In de onderstaande tekst kun je lezen hoe zijn methode werkt. De wiskundige voorkennis die verlangd wordt gaat niet verder dan wiskunde van de middelbare school.



Figuur 1. Eschers Prentententoonstelling

2. PLAATJES OP LIJNEN

Eschers Prentententoonstelling kunnen we zien als een plaatje op het 2-dimensionale vlak. Voordat we plaatjes gaan bekijken op het 2-dimensionale vlak, gaan we eerst een makkelijker geval, namelijk plaatjes op de 1-dimensionale lijn, bekijken.

Het begrip functie ben je waarschijnlijk al eerder tegengekomen. Omdat we dit begrip veelvuldig zullen gebruiken, geven we eerst een definitie.

Definitie. Een functie van een verzameling X naar een verzameling Y is een regel die ieder element van X naar precies één element van Y stuurt.

Neem bijvoorbeeld voor X een groep van vijf mensen die naar een verjaardag gaan en voor Y de zes stoelen in de kamer waar de verjaardag wordt gevierd. Stel nu dat de groep mensen een plekje hebben gevonden in de kamer. We kunnen ons afvragen of zo'n configuratie van de mensen in de kamer ons een functie geeft van X naar Y . We nemen een paar configuratie's door.

(Configuratie 1) Elk persoon gaat op één lege stoel zitten.

(Configuratie 2) Elk persoon gaat op één stoel zitten.

(Configuratie 3) Sommige personen nemen meerdere stoelen in gebruik.

(Configuratie 4) Sommige personen blijven staan of gaan op de grond zitten.

De eerste twee configuraties geven een functie van X naar Y . De laatste twee configuraties geven geen functie van X naar Y .

Opgave 1. Verklaar dit.

Neem nu voor X de verzameling van de reële getallen \mathbb{R} (dit is gewoon een lijn) en voor Y ook de verzameling van de reële getallen \mathbb{R} . We geven elk element van Y een kleur (dit is hetzelfde als een lijn kleuren). Als we nu ook nog een functie van X naar Y hebben, dan kunnen we elk element van X de kleur geven van het element van Y waar het element van X bij hoort. Immers ieder element van X hoort bij precies één element van Y . (In het geval van de verjaardag zou dit betekenen dat de stoelen geverfd zijn en de mensen die bijvoorbeeld op een rode stoel gaan zitten een rood kleurtje krijgen en de mensen die op een blauwe stoel gaan zitten een blauw kleurtje krijgen, enzovoort.)

Opgave 2. We zouden ook eerst de elementen van de verzameling X een kleur kunnen geven en via de functie van X naar Y de elementen van de verzameling Y een kleur kunnen geven. Welke problemen kan dit geven?

Functies van \mathbb{R} naar \mathbb{R} kun je, zoals je gewend bent, in een assenstelsel weer geven. De x -as stelt nu de verzameling X voor en de y -as de verzameling Y . Om aan te geven dat een bepaald element van X bij een bepaald element van Y hoort, zet je op de goede plek een punt in het assenstelsel. Al deze punten samen geven een functie van X naar Y . Neem bijvoorbeeld de functie f die elk element naar zijn kwadraat stuurt, $f : x \mapsto x^2$ (andere notaties $f(x) = x^2$ of $y = x^2$). Dit geeft in het assenstelsel een parabool.

Opgave 3. Stel dat we de verzameling Y (de y -as) op de volgende manier kleuren:

$\langle \leftarrow, 0 \rangle$ geel,

$[0, 2]$ blauw,

$\langle 2, \rightarrow \rangle$ rood.

Welke kleuren krijgen dan de elementen van de verzameling X (de x -as)? (Hint: Teken de parabool en kleur de y -as zoals gegeven.)

In de volgende paragraaf zullen we voor X en voor Y niet de verzameling van de reële getallen \mathbb{R} , die we ons kunnen voorstellen als een lijn, maar de verzameling van de complexe getallen \mathbb{C} , die we ons kunnen voorstellen als een vlak, nemen. Als we dus een plaatje hebben op het vlak (elk element van Y heeft een kleur gekregen) en een functie van X naar Y dan krijgen we een nieuw plaatje (elk element van X krijgt een kleur).

3. PLAATJES OP VLAKKEN

Voordat we plaatjes kunnen gaan maken op het vlak zullen we eerst een geschikte verzameling bespreken die we ons kunnen voorstellen als het vlak, namelijk de complexe getallen. De volgende inleiding laat zien dat complexe getallen wenselijk zijn.

Als we een lijn hebben in het vlak dan kunnen we zien of deze de x -as snijdt. Hebben we ook nog de formule behorend bij deze lijn dan kunnen we als de lijn de x -as snijdt dit snijpunt ook uitrekenen.

Opgave 4. Teken de lijn $y = 5x + 3$ en bereken het snijpunt met de x -as.

Opgave 5. Doe hetzelfde voor de parabool $y = x^2 + x - 1$.

In opgave 5 heb je waarschijnlijk de abc-formule gebruikt om de snijpunten met de x -as te berekenen. Bij sommige parabolen, bijvoorbeeld $y = x^2 + 1$, kun je geen snijpunten vinden met de x -as. Wanneer je de parabool $y = x^2 + 1$ tekent zie je dat er inderdaad geen snijpunten zijn. Als je daarentegen de abc-formule gebruikt dan moet je de wortel uit -4 trekken, wat niet mogelijk is, en dus concludeer je ook met de abc-formule dat er geen snijpunten met de x -as zijn.

Opgave 6. Bereken met je GR een snijpunt met de x -as van $y = x^3 - 15x - 4$.

Net zoals je bij kwadratische functies (parabolen) de abc-formule hebt, heb je bij kubische functies de formule van Cardano, namelijk gegeven de vergelijking $x^3 - 3px - 2q = 0$ dan is

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

een oplossing. In opgave 6 kun je deze formule gebruiken door p gelijk te nemen aan 5 en q gelijk te nemen aan 2. Proberen we echter met deze p en q de formule van Cardano te gebruiken dan moeten we een wortel trekken uit een negatief getal, namelijk -121 . We zouden net zoals bij de abc-formule kunnen

concluderen dat er geen snijpunt met de x -as bestaat, maar we weten dat er wel een snijpunt met de x -as bestaat! We kunnen dit geheimzinnige verschijnsel oplossen met behulp van complexe getallen.

Complexe getallen

We introduceren het nieuwe getal i . Dit getal heeft de eigenschap dat als je het met zichzelf vermenigvuldigt je -1 krijgt, oftewel $i \cdot i = -1$. De verzameling van de complexe getallen bestaat uit alle getallen van de vorm $a + b \cdot i$, met a en b beide reële getallen. Voorbeelden zijn $5 + 2 \cdot i$, $\sqrt{2} + 1 \cdot i$ en $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot i$. Met complexe getallen kun je, net zoals met de reële getallen, rekenen. Dit gaat op dezelfde manier als het rekenen tijdens het vereenvoudigen (of buiten haakjes werken) van een uitdrukking waar x in voorkomt. Een voorbeeld van zo'n uitdrukking is $(3 + 5 \cdot x) \cdot (1 + 3 \cdot x) - 6 - 8 \cdot x$. Het enige wat verandert is dat je een i neerzet inplaats van een x en tevens kun je i^2 vervangen door een -1 , dat was immers de eigenschap van i .

Opgave 7. Bereken $(3 + 5 \cdot i) \cdot (1 + 3 \cdot i) - 6 - 8 \cdot i$. Bereken $(2 \cdot i)^2$ en $(-2 \cdot i)^2$. Laat zien dat er 2 oplossingen zijn van de vergelijking $x^2 + 4 = 0$ als x een complex getal mag zijn.

Opgave 8. In deze opgave gaan we een snijpunt berekenen van $y = x^3 - 15x - 4$ met de x -as met behulp van Cardano's formule. Laat zien dat Cardano's formule de volgende uitdrukking geeft

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bereken $(11i)^2$, $(2 + i)^3$ en $(2 - i)^3$. Concludeer dat

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 + i + 2 - i = 4.$$

Controleer dat bij $x = 4$ de grafiek $y = x^3 - 15x - 4$ de x -as snijdt.

Je weet nu hoe je complexe getallen moet optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Voor het delen van complexe getallen hebben we een foefje. Je kunt $\frac{1+x}{2+3 \cdot x}$ niet vereenvoudigen. De breuk $\frac{1+i}{2+3 \cdot i}$ kun je echter wel vereenvoudigen, namelijk

$$\frac{1 + 1 \cdot i}{2 + 3 \cdot i} = \frac{1 + 1 \cdot i}{2 + 3 \cdot i} \cdot 1 = \frac{1 + 1 \cdot i}{2 + 3 \cdot i} \cdot \frac{2 + (-3) \cdot i}{2 + (-3) \cdot i} = \frac{2 - 3i + 2i - 3i^2}{4 - 6i + 6i - 9i^2} =$$

$$\frac{2 - i - 3 \cdot (-1)}{4 - 9 \cdot (-1)} = \frac{5 - i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{-1}{13}i.$$

We hebben gebruikgemaakt van het merkwaardige product

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (b^2 \cdot i^2) = a^2 - (b^2 \cdot (-1)) = a^2 + b^2.$$

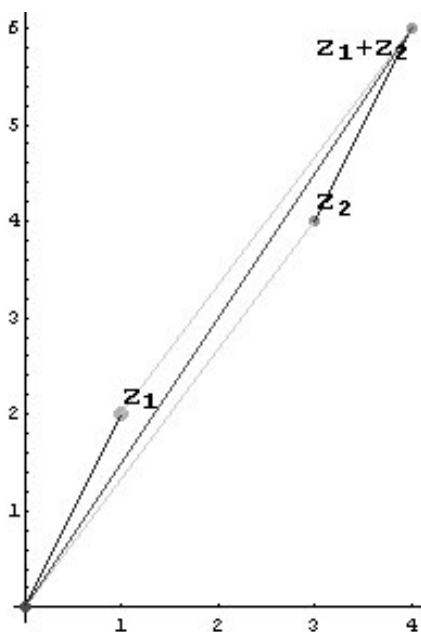
Opgave 9. Bereken

$$\frac{25 + 75i}{3 + 4i}$$

Vaak stellen we ons de complexe getallen voor in het vlak, wat we het complexe vlak noemen. De x -as stelt dan alle getallen van de vorm $a + 0 \cdot i$ voor en de y -as alle getallen van de vorm $0 + b \cdot i$. Het vinden van het complex getal $5 + 2 \cdot i$ in het complexe vlak is niks anders dan het vinden van het punt $(5, 2)$.

Opgave 10. Teken in het complexe vlak de punten $3 + 5 \cdot i$, $1 + 3 \cdot i$ en $-6 + (-8) \cdot i$.

Het optellen van twee complexe getallen ziet er in het complexe vlak uit als het samenstellen van twee vectoren, waarvan de staart van beide in de oorsprong zit (het complexe getal $0 + 0 \cdot i$) en de kop zich bevindt bij de bijbehorende complexe getallen. Door het tekenen van het bijbehorende parallellogram vind je de som van twee complexe getallen.¹¹



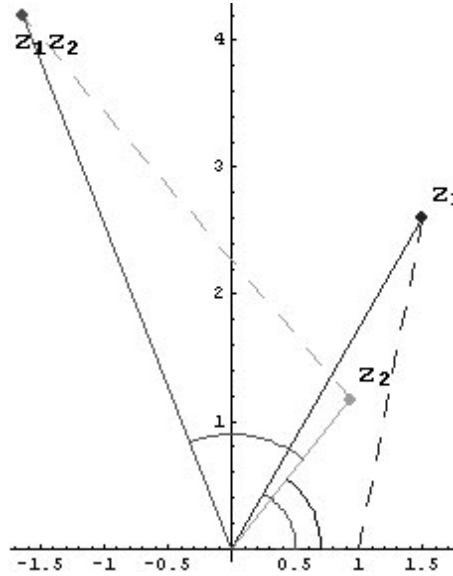
Figuur 2. Het optellen van twee complexe getallen

Opgave 11. Bereken $(3 + 5 \cdot i) + (1 + 3 \cdot i)$ en teken het bijbehorende parallellogram. Doe hetzelfde voor $1 + 3 \cdot i$ en $-6 + (-8) \cdot i$.

¹¹ Zie pagina 78 voor een kleurversie.

Wanneer we twee complexe getallen vermenigvuldigen geldt voor de vector die hoort bij de uitkomst van de vermenigvuldiging het volgende:

- (1) De lengte van de vector is het product van de lengtes van de twee andere vectoren.
- (2) De hoek die de vector maakt met de positieve x -as is de som van de hoeken die de twee andere vectoren maken met de positieve x -as.¹²



Figuur 3. Het vermenigvuldigen van twee complexe getallen

Opgave 12. (a) Laat zien dat de driehoeken $01z_1$ en $0z_2z_1z_2$ in de figuur congruent zijn. (b) Teken de vectoren behorend bij $(3+4i)$, $(1+i)$ en $(3+4i) \cdot (1+i)$. En ga de twee bovenstaande eigenschappen na.

We gaan nu functies van X naar Y bekijken, waar we voor X en Y beide de complexe getallen \mathbb{C} nemen. Beschouw de functie f die bij ieder complex getal z er $2+i$ optelt, $f : z \mapsto z + (2+i)$. Stel dat we Y kleuren als een oneindig doorlopend schaakbord met de oorsprong midden in een veld en de velden 1 bij 1. Dan zal het plaatje dat behoort bij X precies hetzelfde eruit zien als Y , alleen de witte velden zijn zwart geworden en de zwarte velden zijn wit geworden.

Opgave 13. Overtuig jezelf hiervan door middel van een plaatje.

¹² Zie pagina 78 voor een kleurversie.

Beschouw nu de functie $f : z \mapsto \sqrt{2}(1+i) \cdot z$. Met behulp van de bovenstaande twee regels weten we dat elke vector 2 keer zolang wordt en gedraaid wordt over een hoek van $\frac{1}{4}\pi$ (45 graden).

Opgave 14. Neem dezelfde kleuring voor Y als in opgave 13 en bestudeer hoe het plaatje er op X uitziet.

Een iets lastiger functie is $f : z \mapsto z^3$. Hier wordt de hoek van de vector drie keer zo groot en de lengte van de vector wordt tot de macht 3 verheven. Neem nu het element in het complexe vlak waarvan de lengte 1 is en de hoek $\frac{2}{3}\pi$ (120 graden). Dit element tot de macht 3 verheven geeft het element waarvan de hoek 2π is (360 graden) en de lengte 1 is, dat is het element $1 + 0 \cdot i = 1$. Natuurlijk geldt ook $1^3 = 1$, dus $f(1) = 1$.

Opgave 15. Voor welk ander element z geldt ook nog $f(z) = 1$? Teken twee complexe vlakken X en Y en bestudeer de functie $f : z \mapsto z^3$, door te kijken waar verschillende elementen met dezelfde hoek naar toe gaan. Geef Y weer de kleuring van opgave 13 en teken het bijbehorende plaatje voor X .

Opgave 16. Gebruik Cardano's formule om alle drie de snijpunten van $y = x^3 - 15x - 4$ met de x -as te vinden.

Om te begrijpen hoe het gat in Eschers Prentententoonstelling ingevuld is, hebben we nog één functie nodig, namelijk $f : z \mapsto e^z$. Met behulp van Eulers formule

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i,$$

waar θ in radialen wordt uitgedrukt, kunnen we de functie $f : z \mapsto e^z$ begrijpen. Neem bijvoorbeeld $z = 1 + \frac{1}{2}\pi \cdot i$, dan krijgen we

$$e^{1+\frac{1}{2}\pi \cdot i} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}\pi \cdot i} = e \cdot (\cos(\frac{1}{2}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi)i) = e(0 + 1 \cdot i) = e \cdot i.$$

Opgave 17. Bereken $e^{\pi \cdot i}$, $e^{\frac{3}{2}\pi \cdot i}$, $e^{\ln(1)+\frac{1}{3}\pi \cdot i}$, $e^{\ln(2)+\frac{2}{3}\pi \cdot i}$ en teken deze punten in het complexe vlak. Wat is de rol van a en wat is de rol van b als je $e^{a+b \cdot i}$ in het complexe vlak tekent?

In principe kunnen we ieder complex getal, behalve 0, als een macht van e schrijven, want de lengte van de vector $e^{a+b \cdot i}$ is gelijk aan e^a en de hoek van de vector $e^{a+b \cdot i}$ is gelijk aan b radialen (is $\frac{b}{2\pi} \cdot 360$ graden).

Opgave 18. Schrijf $1+i$ en $2-i$ als machten van e . Waarom kun je nul niet als macht van e schrijven?

Door complexe getallen als macht van e te schrijven kun je eenvoudig de twee

regels verklaren waar de vectoren onder vermenigvuldiging aan voldoen. Immers $e^{a+bi} \cdot e^{c+di} = e^a e^{bi} e^c e^{di} = e^a e^c e^{(b+d)i}$.

Opgave 19. Ga na dat dit inderdaad overeenkomt met de twee regels voor het vermenigvuldigen van vectoren.

We gaan nu de functie $f : z \mapsto e^z$ bestuderen. Als we een element uit het complexe vlak X nemen vragen we ons af bij welk element het hoort in het complexe vlak Y . Zo gaat $\ln(2) + 2\pi \cdot i$ naar $e^{\ln(2)+2\pi \cdot i} = e^{\ln(2)} e^{2\pi \cdot i} = 2(\cos(2\pi) + \sin(2\pi)i) = 2(1 + 0 \cdot i) = 2$. Maar ook $\ln(2) + 4\pi \cdot i$ en $\ln(2) + 6\pi \cdot i$ gaan naar 2.

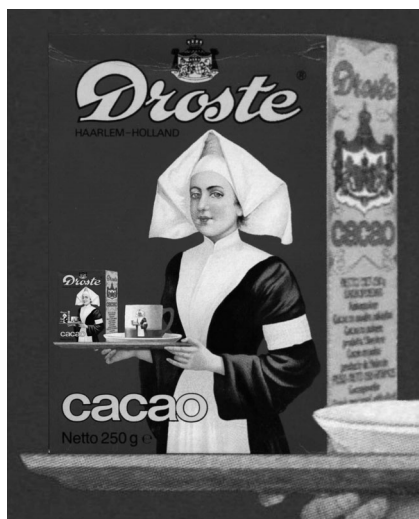
Opgave 20. Teken twee complexe vlakken X en Y . Teken in Y een cirkel met als middelpunt het element $1 + i$ en kijk hoe het plaatje er in X uitziet als we de functie $f : z \mapsto e^z$ nemen. Beschrijf wat voor uitwerking de functie $f : z \mapsto e^z$ heeft in het complexe vlak.

4. ESCHERS PRENTENTENTOONSTELLING

We hebben nu genoeg kennis om te begrijpen hoe het gat in Eschers Prentententoonstelling is gevuld. We zullen in drie stappen (3 functies) en vier plaatjes (4 complexe vlakken) van een recht Droste-plaatje naar een in elkaar gedraaid Droste-plaatje gaan.

Een Droste-plaatje is een plaatje dat zichzelf weer bevat en dat plaatje bevat ook weer zichzelf enzovoorts.¹³

¹³ Zie pagina 79 voor de kleurenversie



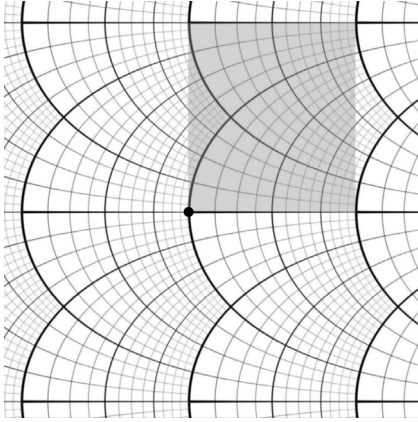
Figuur 4. Droste-plaatje

In Eschers rechte Prentententoonstelling zien we een man die naar prent kijkt en in die prent staat hij zelf weer (256 maal inzoomen) naar een prent te kijken.

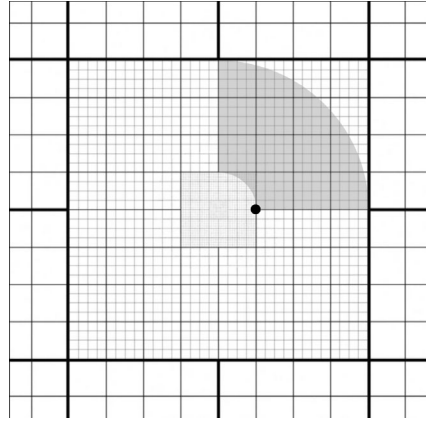


Figuur 5. Eschers rechte Prentententoonstelling

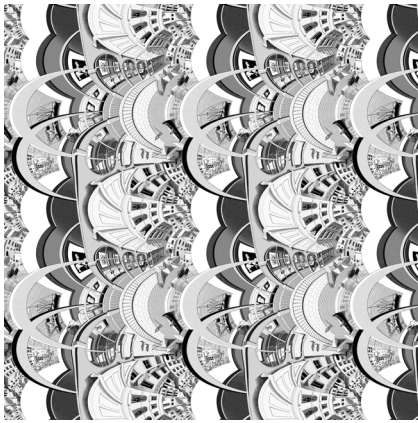
Stap 1) We leggen het rechte Droste-plaatje zo op het complexe vlak dat de oorsprong precies het verdwijnpunt is. Nu hebben we het hele complexe vlak gekleurd behalve de oorsprong, dit is onze Y . Het plaatje X krijgen we via de functie $f : z \mapsto e^z$.



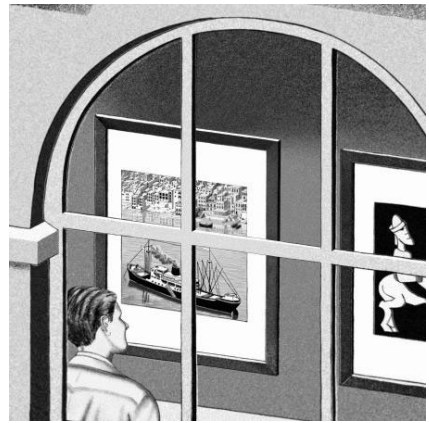
Figuur 6. Het complexe vlak waar plaatje X op komt te liggen



Figuur 7. Het complexe vlak waar plaatje Y op komt te liggen

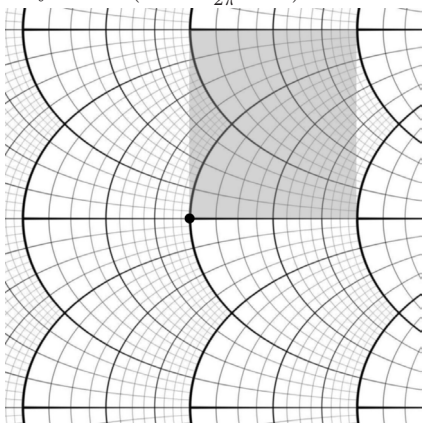


Figuur 8. Plaatje X

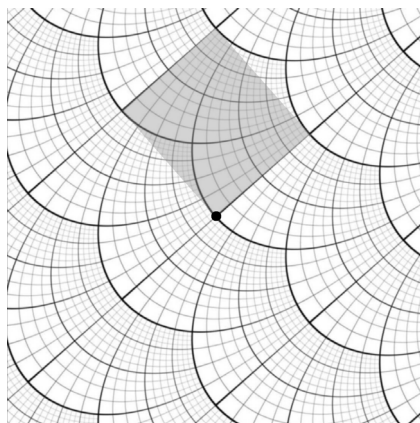


Figuur 9. Plaatje Y

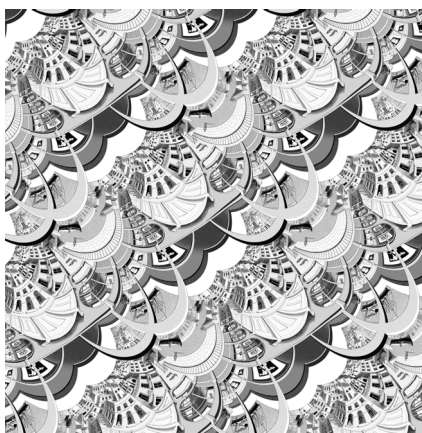
Stap 2) Het nieuwe plaatje is nu onze Y . Het plaatje X krijgen we via de functie $f : z \mapsto \left(1 - \frac{\ln(256)}{2\pi} \cdot i\right) \cdot z$.



Figuur 10. Het complexe vlak waar plaatje X op komt te liggen



Figuur 11. Het complexe vlak waar plaatje Y op komt te liggen

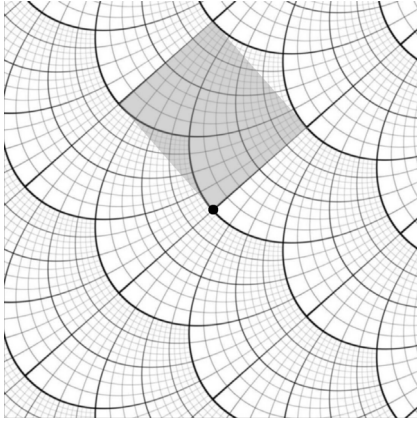


Figuur 12. Plaatje X

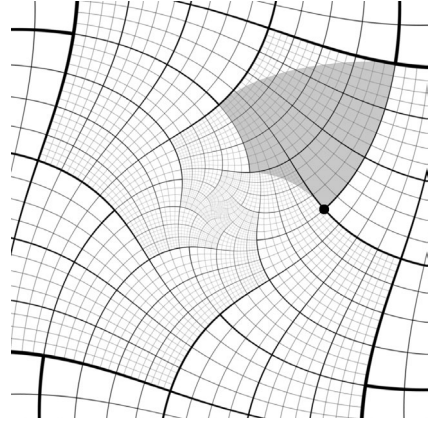


Figuur 13. Plaatje Y

Stap 3) Deze stap is iets anders. We nemen nu namelijk het nieuw verkregen plaatje uit stap 2 als X en gaan een nieuw plaatje Y maken via de functie $f : z \mapsto e^z$. Dit nieuwe plaatje is de Prentententoonstelling van Escher met het gat ingevuld.



Figuur 14. Het complexe vlak waar plaatje X op komt te liggen



Figuur 15. Het complexe vlak waar plaatje Y op komt te liggen



Figuur 16. Plaatje X



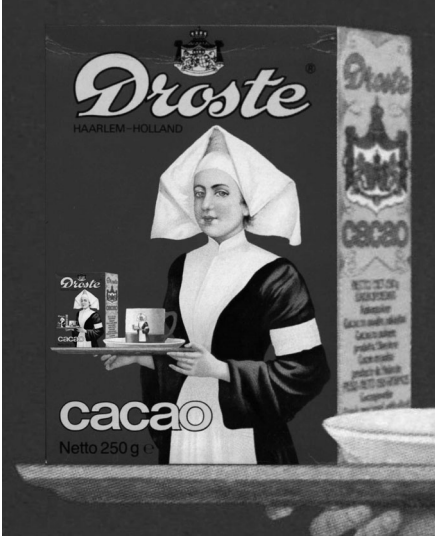
Figuur 17. Plaatje Y

In opgave 2 waarschuwden we dat dit problemen kan geven. In dit geval is het echter zo dat het geen problemen geeft. Er zijn geen elementen in X met verschillende kleuren die naar hetzelfde element in Y worden gestuurd.

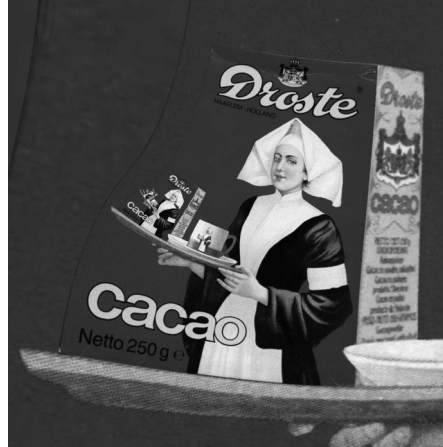
Opgave 21. Bestudeer de plaatjes (teken eventueel wat lijnen en kijk wat de corresponderende lijnen zijn bij stap 1 t/m 3) en de afbeeldingen. Verklaar waarom we in stap 3 geen problemen hebben. Wie zijn eigen tekening wil ver-

vormen kan de roosters op de laatste pagina's gebruiken.

Natuurlijk kunnen we hetzelfde principe toepassen op het Droste-pakje waar de mevrouw met het dienblad opstaat. (zie kleurenpagina's 79–80)



Figuur 18. Het Droste-pakje



Figuur 19. Het Droste-pakje verescherd

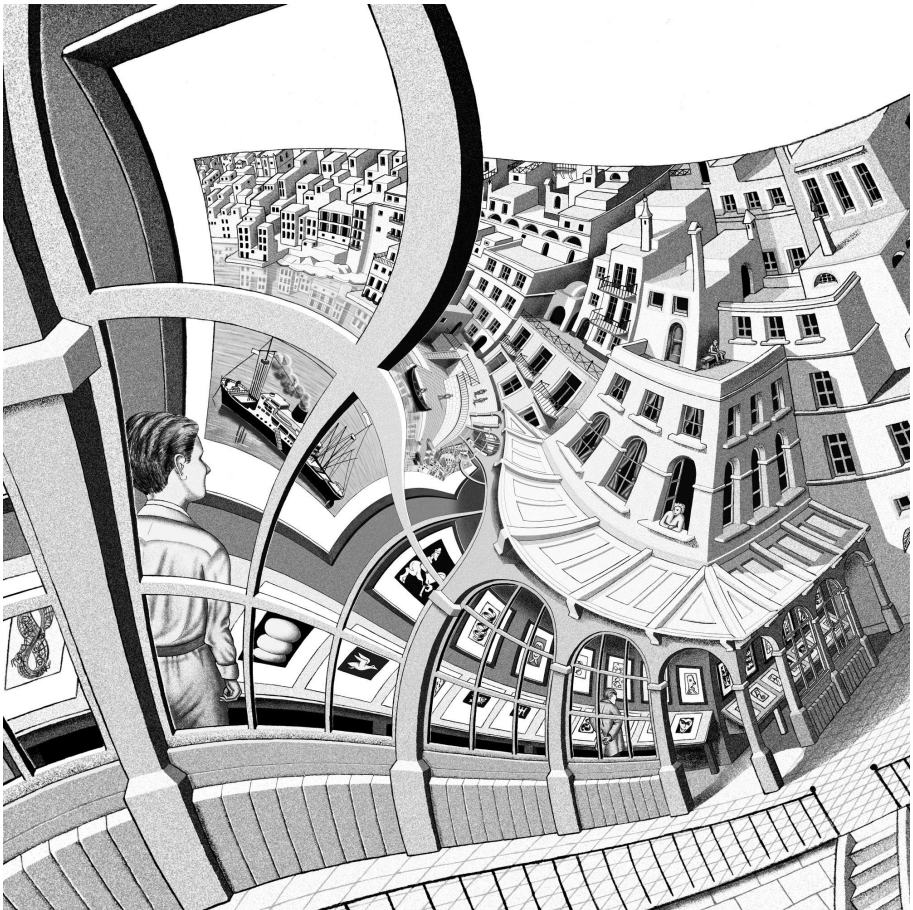


Figuur 20. Het Droste-pakje teruggetrokken over de afbeelding $f : z \mapsto e^z$

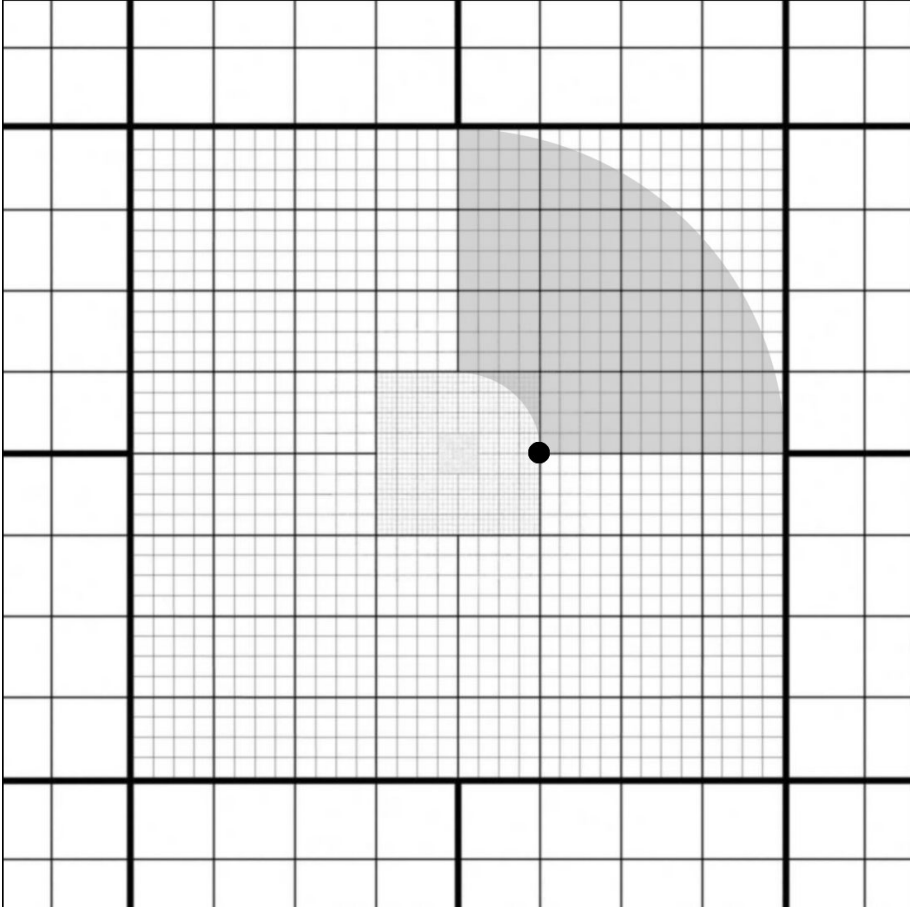
Er valt nog veel meer te lezen en te zien over Escher en het vervormen van plaatjes. Hieronder staat een aantal voorbeelden:

- De speeltuin van de wiskunde, Bart de Smit en Jaap Top, hoofdstuk 2 (sluit goed aan op deze tekst).

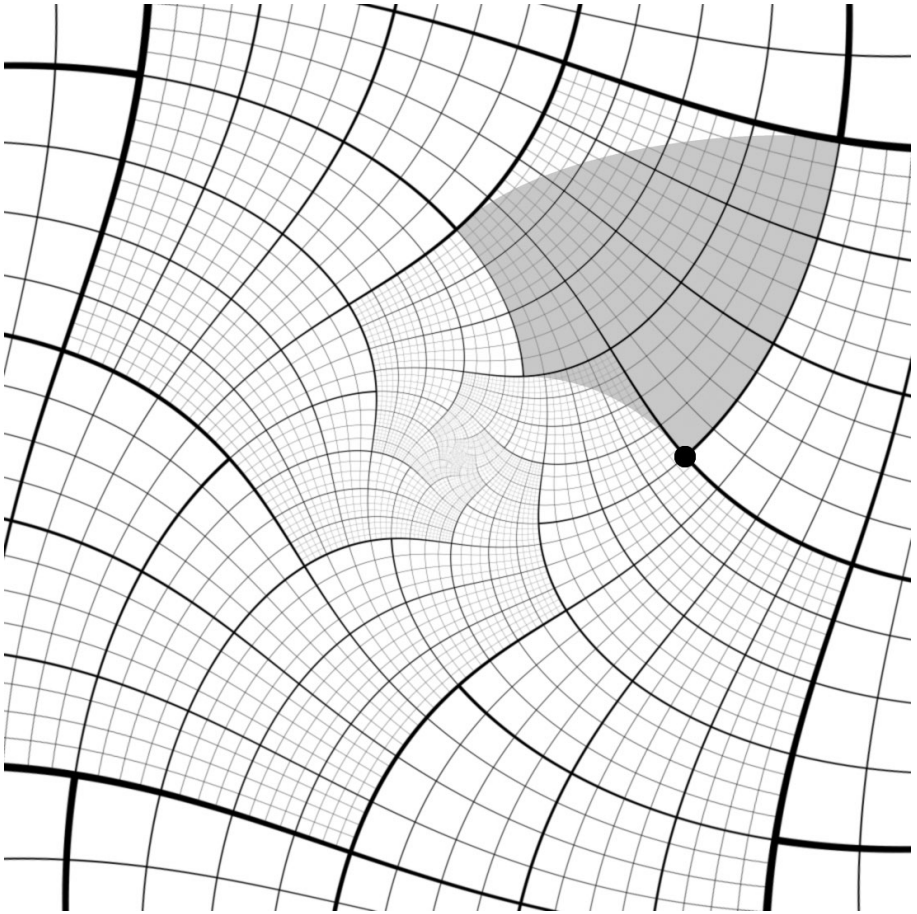
- escherdroste.math.leidenuniv.nl (animaties en plaatjes).
- De toverspiegel van M.C. Escher, Bruno Ernst (lees hoe Escher zijn Prentententoonstelling maakte).
- Leven en werk van M.C. Escher, J.L. Locher (bevat al het werk van de graficus).
- mcescher.nl (de officiële website).
- Het museum “Escher in het Paleis” in Den Haag (om o.a. een originele afdruk van Prentententoonstelling te zien).



Figuur 21. Eschers ingevulde prentententoonstelling



Figuur 22.



Figuur 23.

CWI SYLLABI

- 1 Vakantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981–1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982–1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuijnman. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vakantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuijnman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983–1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vakantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vakantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984–1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985–1987*. 1988.
- 18 Vakantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vakantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986–1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vakantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vakantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.
- 29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
- 30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986–1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
- 31 Vakantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.
- 32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987–1992*. 1992.
- 33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
- 34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.
- 35 Vakantiecursus 1993: *Het reële getal*. 1993.
- 36 Vakantiecursus 1994: *Computeralgebra*. 1994.
- 37 G. Alberts. *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Syllabus*. 1994.
- 38 G. Alberts, J. Schut (eds.). *Wiskunde en praktijk in historisch perspectief. Reader*. 1994.
- 39 E.A. de Kerf, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1989–1990. Mathematical structures in field theory*. 1996.
- 40 Vakantiecursus 1995: *Kegelsneden en kwadratische vormen*. 1995.
- 41 Vakantiecursus 1996: *Chaos*. 1996.
- 42 H.C. Doets. *Wijzer in Wiskunde*. 1996.
- 43 Vakantiecursus 1997: *Rekenen op het Toeval*. 1997.
- 44 Vakantiecursus 1998: *Meetkunde, Oud en Nieuw*. 1998.
- 45 Vakantiecursus 1999: *Onbewezen Vermoedens*. 1999.
- 46 P.W. Hemker, B.W. van de Fliert (eds.). *Proceedings of the 33rd European Study Group with Industry*. 1999.
- 47 K.O. Dzharipidze. *Introduction to Option Pricing in a Securities Market*. 2000.
- 48 Vakantiecursus 2000: *Is wiskunde nog wel mensenwerk?* 2000.
- 49 Vakantiecursus 2001: *Experimentele wiskunde*. 2001.
- 50 Vakantiecursus 2002: *Wiskunde en gezondheid*. 2002.
- 51 G.M. Hek (ed.). *Proceedings of the 42nd European Study Group with Industry*. 2002.
- 52 Vakantiecursus 2003: *Wiskunde in het dagelijks leven* 2003.
- 53 Vakantiecursus 2004: *Structuur in schoonheid* 2004.

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang beslistkunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 3: statistiek*. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang beslistkunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang beslistkunde, deel 5: inleiding tot de mathematische beslistkunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang beslistkunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.
- 1.7a G. de Leve. *Leergang beslistkunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang beslistkunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang beslistkunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang beslistkunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
- 6 K.K. Koksma. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatiertillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970.
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatiethorie*. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973.
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Iongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenberg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassing van naburigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1974.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983.